многоуважаемому
Сергею Матвеевичу
Соловьеву
отъ автора

И. И. Жегалкинъ.

ТЕОРІЯ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

Часть 1-я.

Лекціи читанныя на Высшихъ Женскихъ Курсахъ и въ Константиновскомъ Межевомъ Институтѣ. въ 1917 году.



МОСКВА
1917 года

ГЛАВА 1 КВАДРАТУРА ПЛОЩАДЕЙ

Задача о вычисленіи площадей принадлежитъ къ числу тѣхъ задачъ которыя естественно возникаютъ при самомъ началѣ изученія геометріи Причина этого заключается въ томъ, что эта задача имѣетъ не только теоретическій, но и практическій интересъ. Поэтому не случайно, быть можетъ первыя начала геометріи были заложены въ Египтѣ. Ежегодные бурные разливы Нила требовали постояннаго исправленія границъ участковъ и тѣмъ самымъ ставили на очередь вопросъ о вычисленіи площадей.

Древніе геометры при рѣшеніи задачъ о вычисленія площадей употребляли слѣдующій методъ: они старались построить квадратъ равновеликій площади данной фигуры. Если это имъ удавалось то они считали задачу рѣшенной. Благодаря же этому ихъ методу и въ настоящее время очень часто задачу о вычисленіи площади какой либо фигуры называютъ задачей о квадратурѣ этой площади.

По аналогичной причинѣ вычисленіе объема даннаго тѣла называется его кубатурой, потому что древніе геометры, чтобы вычислить объемъ даннаго тѣла старались построить равновеликій ему кубъ

Въ настоящее время уже въ элементарной геометріи вычисляются площади простѣйшихъ фигуръ, какъ-то треугольника, трапеціи и тому подобныхъ. Умѣя уже вычислять площадь треугольника, мы можемъ всегда вычислить и площадь любого многоугольника Для этого достаточно разбить площадь даннаго многоугольника на систему треугольниковъ что можно сдѣлать весьма разнообразными способами, напримѣръ проводя всевозможныя діагонали изъ какой-нибудь вершины.

Но если такимъ образомъ мы не встрѣчаемъ никакихъ особыхъ теоретическихъ затрудненій при вычисленія площадей, ограниченныхъ отрѣзками прямыхъ линій, то совершенно иначе представляется дѣло, лишь только въ число границъ данной фигуры входятъ не только отрѣзки прямыхъ, но также и дуги кривыхъ линій. Уже задача о квадратурѣ круга рѣшается въ элементарной геометріи съ большими затрудненіями и требуетъ понятія о предѣлѣ. Эти затрудненія возрастаютъ, если границами фигуры служатъ болѣе сложныя кривыя. Легко видѣть причину этого.

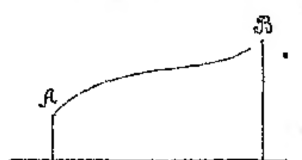
Если мы должны измѣрить какую-нибудь площадь, ограниченную нѣкоторой кривой линіей, то для этого мы должны узнать, сколько и какихъ частей квадрата, принятаго за единицу, можно уложить въ данной площади. Но на какіе бы малые квадраты мы не дѣлили квадратъ, принятый за единицу, и сколько бы и какъ бы мы не укладывали эти части, мы всегда будемъ получать фигуру, ограниченную не кривой линіей, а ломанной. Слѣдовательно: площадь ограниченная кривыми линіями, никогда не можетъ быть вполнѣ заполнена частями квадрата.

Точно также ясно, что тѣло, ограниченное кривыми поверхностями не можетъ быть заполнено никакими частями куба.

Древніе геометры не были въ состояніи преодолѣть затрудненій, вытекающихъ изъ этого факта. Хотя они и вычисляли площади и объемы болѣе или менѣе сложныхъ фигуръ, но они не имѣли общаго метода, который могъ бы быть примѣненъ для вычисленія площади и объема всякой, произвольно взятой, фигуры. Этотъ методъ былъ выработанъ только математикой новаго времени, которая въ понятіи о предѣлѣ пріобрѣла могучее орудіе для рѣшенія самыхъ трудныхъ задачъ. Пользуясь этимъ понятіемъ, а также опираясь на понятія о координатахъ и функціи, оказалось возможнымъ облечь геометрическія задачи о квадратурѣ и кубатурѣ въ аналитическую форму. Преобразованныя такимъ образомъ эти задачи привели къ понятію объ опредѣленныхъ интегралахъ. Создался новый отдѣлъ математики, извѣстный въ настоящее время подъ названіемъ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ. Задачи о квадратурѣ и кубатурѣ являются теперь только частнымъ случаемъ приложенія этой теоріи, которая все болѣе и болѣе развивается и совершенствуется и которая въ настоящее время является однимъ изъ важнѣйшихъ отдѣловъ математики. Тѣмъ интереснѣе отмѣтить тотъ фактъ, что, только облекая въ аналитическую форму геометрическую задачу о квадратурѣ, можно легко и естественно притти къ понятію объ опредѣленномъ интегралѣ, потому что теорія опредѣленныхъ интеграловъ есть не что иное, какъ замаскированная задача о квадратурѣ площадей. Поставленная еще въ глубокой древности эта задача служитъ предметомъ постояннаго изслѣдованія и новѣйшихъ математиковъ, но только теперь ея геометрическая сущность глубоко скрыта подъ тѣми аналитическими формами, въ которыя ее обыкновенно облекаютъ. Поэтому, чтобы притти къ понятію объ опредѣ-

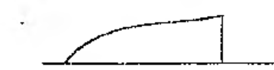
ленномъ интегралѣ, наиболѣе простымъ и естественнымъ путемъ, мы должны предварительно ознакомиться съ тѣми методами, которыми пользуется современная математика при рѣшеніи задачи о квадратурѣ площадей.

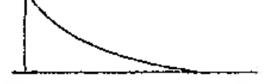
КРИВАЯ ТРАПЕЦІЯ.



Въ виду нѣкотораго сходства съ обыкновенной трапеціей, мы будемъ называть кривою трапеціею, или даже просто трапеціею, всякую фигуру (см. черт.), ограниченную съ трехъ сторонъ прямыми, перпендикулярными къ одной изъ нихъ, а съ четвертой стороны данной кривой. Отрѣзокъ ab назовемъ нижнимъ основаніемъ трапеціи, самую же кривую верхнимъ основаніемъ. Стороны Aa и Bb, перпендикулярныя къ нижнему основанію, дадутъ намъ бока трапеціи.

Кривыми трапеціями мы будемъ называть также и фигуры слѣдующихъ типовъ:







разсматривая ихъ какъ частные случаи трапеціи, у которыхъ исчезали одинъ или оба бока. Слѣдовательно, согласно этой терминологіи, половина круга есть кривая трапеція.

Вообще говоря, кривая, ограничивающая данную трапецію сверху, имѣетъ волнообразную форму. Но геометрически ясно, что въ этомъ случаѣ всегда можно раздѣлить данную трапецію на нѣсколько частей, уже ограниченныхъ сверху только монотонными кривыми, т. е. такими кривыми, ордината которыхъ является монотонной функціей абсциссы. (См. черт.)

Понятіе о кривой трапеціи имѣетъ большое значеніе потому, что всякую данную плоскую фигуру всегда можно раздѣлить на нѣсколько кривыхъ трапецій, сумма площадей которыхъ даетъ намъ площадь данной фигуры. Такъ, напримѣръ, фигура на чертежѣ раздѣлена на шесть трапецій. Поэтому, съ теоретической точки зрѣнія, чтобы умѣть вычислять площади любого типа, достаточно найти общій методъ, пригодный для вычисленія площади любой кривой трапеціи.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ

Условимся въ употребленіи нѣкоторыхъ терминовъ и обозначеніяхъ, которыми намъ придется пользоваться довольно долгое время.

Имѣя какой-нибудь интервалъ (a , b), мы можемъ раздѣлить

Δx_0 Δx_1 Δx_2 Δx_k Δx_{n-1}

x_0 a x x_2 x_3 x_k x x_{n-1} $b = x_n$

его на произвольное число и болѣе мелкихъ подынтерваловъ съ помощью ряда произвольно выбранныхъ точекъ, которыя мы будемъ называть точками дѣленія и абсциссы которыхъ, въ порядкѣ ихъ слѣва направо, обозначимъ слѣдующими символами:

$$x_1 , x_2 \quad x_3 , \ldots . \quad x_{n-2} \quad x_{n-1}$$

причемъ для симметріи положимъ $a \; x_0$, $b = x_n$ Получаемые же отъ дѣленія подынтервалы мы назовемъ <u>элементарными</u> интервалами

Введемъ также слѣдующія обозначенія

$$x_1 - a = \Delta x_0 , \; x_2 \; x_1 = \Delta x_1 , \; x_3 - x_2 - \Delta x_2 \qquad b \; x_{n-1} \; \Delta x_n$$

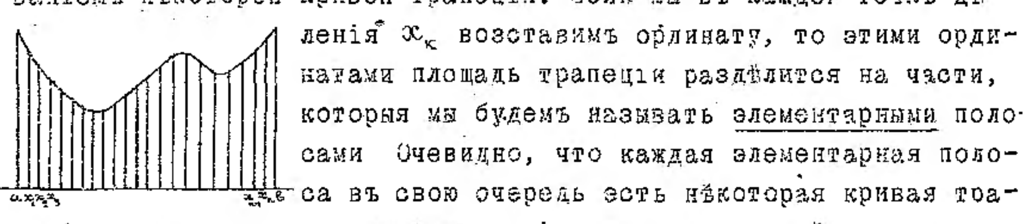
Слѣдовательно, вообще

$$\Delta x_k \quad x_{k+} \quad x_k$$

и очевидно, что Δx_k есть не что иное, какъ то приращеніе, которое получаетъ x , переходя отъ значенія x_k къ значенію x_{k+1} . Также ясно, что это приращеніе Δx_k геометрически изображается длиною элементарнаго интервала, концами котораго служатъ точки x_k и x_{k+1} . Слѣдовательно, длины элементарныхъ интерваловъ, въ порядкѣ ихъ слѣва направо, соотвѣтственно равны

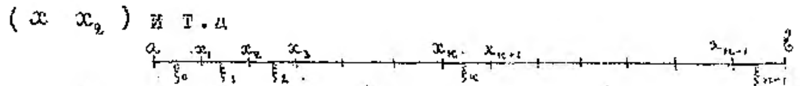
$$\Delta x_0 , \; \Delta x_1 , \; \Delta x_2 , \; \Delta x_3 \qquad . \; \Delta x_n$$

Предположимъ теперь, что интервалъ (a , b) служитъ основаніемъ нѣкоторой кривой трапеціи. Если мы въ каждой точкѣ дѣленія x_k возставимъ ординату, то этими ординатами площадь трапеціи раздѣлится на части, которыя мы будемъ называть <u>элементарными</u> полосами Очевидно, что каждая элементарная полоса въ свою очередь есть нѣкоторая кривая трапеція и что площадь данной трапеціи равняется суммѣ площадей всѣхъ элементарныхъ полосъ.

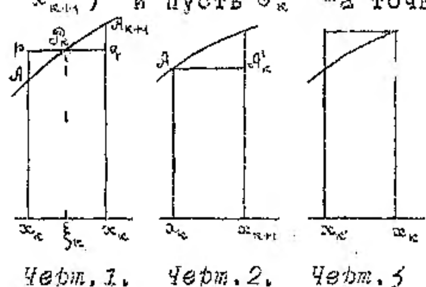


Въ каждомъ элементарномъ интервалѣ отмѣтимъ, совершенно произвольно, какую-нибудь точку. Условимся обозначать символомъ ξ_k точку, выбранную въ интервалѣ (x_k x_{k+1}). Слѣдовательно ξ_0 есть точка въ интервалѣ (a , x_1), ξ_1 - точка въ интервалѣ

$(x\ x_2)$ и т.д



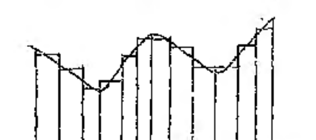
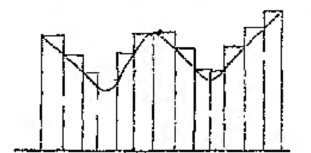
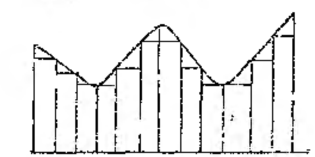
Разсмотримъ элементарную полосу, стоящую на интервалѣ $(x_k\ x_{k+1})$ и пусть P_k та точка на кривой, абсцисса которой равна ξ_k.


Черт.1. Черт.2. Черт.3

Проведемъ черезъ P_k прямую, параллельную основанію, до пересѣченія ея въ точкахъ p и q крайними ординатами полоски. Получимъ (черт. 1) прямоугольникъ $p x_k x_{k+1} q$, который будемъ называть элементарнымъ прямоугольникомъ общаго типа. Высота его очевидно зависитъ отъ выбора точки ξ_k и, мѣняя положеніе этой точки, мы будемъ получать различные элементарные прямоугольники. Изъ нихъ необходимо отмѣтить два частныхъ случая.

Если мы заставимъ точку ξ_k совпасть съ точкою x_k (черт.2) то получимъ прямоугольникъ $x_k A_k A'_k x_{k+1}$, который назовемъ внутреннимъ элементарнымъ прямоугольникомъ. Если же точку ξ_k помѣстимъ въ точкѣ x_{k+1}, то получимъ выступающій элементарный прямоугольникъ. (Черт. 3)

Построимъ для каждой элементарной полоски соотвѣтствующіе элементарные прямоугольники. Смотря потому, будутъ ли эти прямоугольники всѣ общаго типа, или же всѣ внутренніе, или всѣ выступающіе, мы получимъ одинъ изъ слѣдующихъ геометрическихъ образовъ

Непосредственно очевидно, что площадь данной трапеціи меньше суммы площадей всѣхъ выступающихъ прямоугольниковъ и больше суммы площадей всѣхъ внутреннихъ прямоугольниковъ. Этотъ простой геометрическій фактъ намъ послужитъ исходнымъ пунктомъ для установленія метода, пригоднаго для вычисленія площадей всякихъ трапецій.

ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦІИ.

Примемъ основаніе трапеціи за ось x и предположимъ, что кривая, ограничивающая трапецію, монотонно подымается слѣва на право.

Раздѣлимъ трапецію на элементарные полосы и для каждой полосы построимъ какъ внутренній, такъ и выступающій прямоугольники

(см черт.) Обозначимъ черезъ u площадь трапеціи, черезъ p сумму всѣхъ внутреннихъ, а черезъ q сумму всѣхъ выступающихъ прямоугольниковъ. Геометрически очевидно что



$$p < u < q \qquad 1)$$

Спрашивается, какую мы сдѣлаемъ ошибку, если примемъ площадь u равной p или q?

Всякой элементарной полоскѣ соотвѣтствуютъ два прямоугольника, внутренній и выступающій. Разность между ними есть тоже прямоугольникъ. Мы назовемъ его граничнымъ *) прямоугольникомъ.

Очевидно, что сумма всѣхъ граничныхъ прямоугольниковъ равна $q - p$. Вычислимъ эту сумму.

Обозначимъ высоты граничныхъ прямоугольниковъ въ порядкѣ ихъ слѣва на-право, черезъ h_0, h_1, h_2, h_3, .. h_n. Такъ какъ основанія ихъ соотвѣтственно равны Δx_0 Δx_1 Δx_2 Δx_n то имѣемъ равенство

$$q - p = h_0\Delta x_0 + h_1 \Delta x_1 + h_2\Delta x_2 + \ldots + h_n \Delta x_n \qquad 2).$$

Пусть $\mathfrak{h}$ наибольшій изъ тѣхъ элементарныхъ подынтерваловъ, на которые раздѣлено основаніе трапеціи. Слѣдовательно

$$\Delta x_0 \leqq \mathfrak{h} \quad \Delta x_1 \leqq \mathfrak{h}, \quad \Delta x_2 \leqq \mathfrak{h}, \ldots \quad \Delta x_{n-1} \leqq \mathfrak{h}$$

Замѣняя во 2) всѣ величины $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_{n-1}$ черезъ $\mathfrak{h}$ мы увеличимъ правую часть равенства и получимъ неравенство

$$q - p \leqq \mathfrak{h}(h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_{n-1}) \qquad 3)$$

Продолжимъ**) основанія граничныхъ прямоугольниковъ вправо до пересѣченія съ крайней ординатой $\mathfrak{B}b$. Получимъ систему параллельныхъ линій, которыя раздѣлятъ ординату $\mathfrak{B}b$ на отрѣзки, соотвѣтственно равные высотамъ граничныхъ прямоугольниковъ. Этимъ построеніемъ мы какъ бы переносимъ высоты $h_0, h_1, h_2, \ldots$ на ординату $\mathfrak{B}b$. Геометрически ясно, что

$$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_{n-1} = \mathfrak{B}\mathfrak{D} = \mathfrak{B}b - \mathfrak{A}a.$$

Обозначая черезъ c разность между крайними ординатами трапеціи $c = \mathfrak{B}b - \mathfrak{A}a$ мы изъ 3) получаемъ основное для насъ соотношеніе

$$q - p \leqq \mathfrak{h}c \qquad 4)$$

Это соотношеніе замѣчательно слѣдующимъ. Очевидно, что сум

---

*) *На чертежѣ всѣ граничные прямоугольники заштрихованы*

**) *На чертежѣ пунктирными линіями.*

мы p и q т. е. суммы внутреннихъ и выступающихъ прямоугольниковъ, зависятъ отъ того, какъ выбраны всѣ точки дѣленія x x_2, x_3 x_{n-1} Если мы измѣнимъ хоть одну изъ нихъ, то каждая изъ этихъ суммъ вообще говоря измѣнится

Слѣдовательно лѣвая часть неравенства 4) зависитъ отъ выбора всѣхъ точекъ дѣленія

Но правая часть не зависитъ отъ выбора всѣхъ точекъ дѣленія. Она зависитъ только отъ величины наибольшаго изъ тѣхъ элементарныхъ подынтерваловъ, на которые раздѣлено основаніе трапеціи. Поэтому, если мы будемъ мѣнять точки дѣленія такъ, чтобы наибольшій подынтервалъ сохранялъ одно и то же значеніе, то лѣвая часть неравенства будетъ измѣняться, правая же нѣтъ

Вообразимъ теперь слѣдующій процессъ Раздѣлимъ какъ-нибудь основаніе трапеціи на элементарные интервалы и, построивъ для этого дѣленія внутренніе и выступающіе элементарные прямоугольники, вычислимъ значенія суммъ p и q Пусть скажется что

$$p = p_1 \quad , \quad q = q_1$$

Послѣ этого, уничтоживъ всѣ точки дѣленія, мы снова дѣлимъ основаніе трапеціи на какіе-нибудь элементарные интервалы и вычисляемъ для этого дѣленія значенія суммъ p и q Пусть скажется что при второмъ дѣленіи $p = p_2$, $q = q_2$.

Послѣ этого, уничтоживъ прежнія точки дѣленія, мы въ третій разъ дѣлимъ основаніе трапеціи и вычисляемъ для этого дѣленія значенія суммъ p и q . И такъ далѣе, и такъ далѣе.

Слѣдовательно, мы мыслимъ неограниченно продолжающійся процессъ послѣдовательнаго перехода отъ одного дѣленія трапеціи къ слѣдующему дѣленію.

МЫ ПРЕДПОЛОЖИМЪ, ЧТО ЭТОТЪ ПРОЦЕССЪ ПРОИСХОДИТЪ ТАКЪ, ЧТО ДЛИНА λ НАИБОЛЬШАГО ЭЛЕМЕНТАРНАГО ИНТЕРВАЛА БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЕТСЯ *) И, СЛѢДОВАТЕЛЬНО, ВЪ ПРЕДѢЛѢ ОБРАЩАЕТСЯ ВЪ НУЛЬ.

Очевидно, что такіе процессы возможны. Одинъ изъ простѣйшихъ слѣдующій: мы дѣлимъ въ первый разъ основаніе трапеціи пополамъ. Затѣмъ каждую половину опять пополамъ и т.д всякій раз-

*) *Безконечно умаляющеися величиною мы называемъ всякую перемѣнную величину, предѣлъ которой равенъ нулю. Слѣдовательно, модуль этой величины, въ процессѣ измѣненія, становится и остается менѣе всякой, впередъ заданной, какъ угодно малой, положительной величины.*

при переходѣ къ новому дѣленію, раздѣляя пополамъ всѣ интервалы предыдущаго дѣленія Ясно, что при такомъ процессѣ $\lim \lambda = 0$

Итакъ, пусть процессъ перехода отъ одного дѣленія къ слѣдующему совершается такъ, что λ безконечно умаляется.

Но при всякомъ дѣленіи, какъ мы только что доказали

$$q - p \leq \lambda c$$

Поэтому если, согласно предположенію, $\lim \lambda = 0$, то

$$\lim (q - p) = 0 \qquad 5.)$$

и мы получаемъ теорему <u>предѣлъ суммы граничныхъ прямоугольниковъ равенъ нулю.</u>

Но если u площадь трапеціи, то геометрически ясно, что

$$u - p < q - p \quad , \quad q - u < q - p ,$$

а потому, согласно 5)

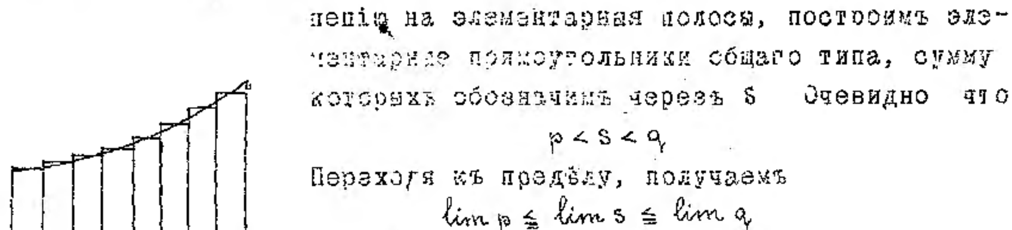
$$\lim (u - p) = 0 \qquad \lim (q - u) = 0$$

т. е.

$$u = \lim p = \lim q$$

и мы получаемъ теорему <u>площадь кривой трапеціи равна предѣлу суммы или внутреннихъ или выступающихъ элементарныхъ прямоугольниковъ.</u>

Легко теперь получить болѣе общій результатъ Раздѣливъ трапецію на элементарныя полосы, построимъ элементарные прямоугольники общаго типа, сумму которыхъ обозначимъ черезъ s Очевидно что



$$p < s < q$$

Переходя къ предѣлу, получаемъ

$$\lim p \leq \lim s \leq \lim q$$

и такъ какъ крайніе члены равны u то

$$u = \lim s$$

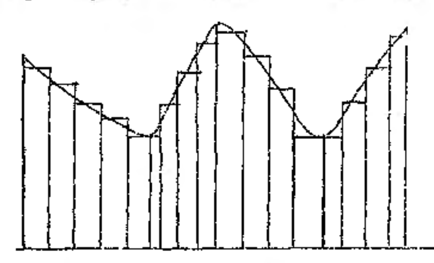
Слѣдовательно: <u>площадь трапеціи равна предѣлу суммы элементарныхъ прямоугольниковъ любого типа.</u>

Пока мы предполагали, что ординаты кривой идутъ слѣва направо возрастая. Но теорема, очевидно справедлива и тогда, когда ордината кривой является убывающей функціей абсциссы. Дѣйствительно достаточно измѣнить направленіе оси x въ противоположное чтобы ордината, какъ функція абсциссы, обратилась изъ убывающей въ возрастающую.

Слѣдовательно, теорема справедлива для всякой трапеціи, ограниченной сверху любой монотонной кривой.

Если же трапеція ограничена волнообразной кривой то, ю-

строивъ элементарные прямоугольники, сумма которыхъ, по-прежнему, пусть будетъ S , мы раздѣлимъ трапецію на нѣсколько частей,



каждая изъ которыхъ была бы ограничена уже монотонной кривой. Пусть $u_1, u_2, u_3, \dots$ площади этихъ частей. Если u площадь всей трапеціи, то

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \qquad 1).$$

Обозначимъ черезъ $s_1, s_2, s_3, \dots$ суммы тѣхъ элементарныхъ прямоугольниковъ, которые принадлежатъ соотвѣтственно трапеціямъ $u_1, u_2, u_3, \dots$

По доказанному,

$$u_1 = \lim s_1 \qquad u_2 = \lim s_2 \qquad u_3 = \lim s_3$$

то $\quad S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$

а потому $\quad \lim S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$

т.е. $u = \lim S$. Слѣдовательно

ЕСЛИ МЫ БУДЕМЪ МЫСЛИТЬ БЕЗКОНЕЧНЫЙ ПРОЦЕССЪ ПОСЛѢДОВАТЕЛЬНАГО ПЕРЕХОДА ОТЪ ОДНОГО ДѢЛЕНІЯ ТРАПЕЦІИ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ КЪ СЛѢДУЮЩЕМУ ДѢЛЕНІЮ ПО ТАКОМУ ЗАКОНУ, ЧТО ДЛИНА НАИБОЛЬШАГО ИЗЪ ПОДИНТЕРВАЛОВЪ, НА КОТОРЫЕ ДѢЛИТСЯ ОСНОВАНІЕ ТРАПЕЦІИ, БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЕТСЯ, ТО ПРЕДѢЛЪ СУММЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВЪ РАВЕНЪ ПЛОЩАДИ ТРАПЕЦІИ.

Короче же мы эту теорему формулируемъ такъ.

ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦІИ РАВНА ПРЕДѢЛУ СУММЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВЪ.

Эта теорема для насъ основная. При приложеніяхъ ея чрезвычайно важно то, что способы дѣленія трапеціи могутъ быть весьма разнообразны. Иногда удается подобрать такой способъ дѣленія, при которомъ сумма S и ея предѣлъ а слѣдовательно, и площадь трапеціи, легко вычисляются

О ПЕРЕХОДѢ КЪ ПРЕДѢЛУ.

Мы доказали. площадь трапеціи равна предѣлу суммы S элементарныхъ прямоугольниковъ.

При этомъ мы должны мыслить что процессъ, который насъ приводитъ къ предѣлу суммы S , происходитъ такъ, что величина λ наибольшаго подынтервала безконечно умаляется.

Такіе процессы могутъ быть весьма разнообразны. Простѣйшій, какъ было указано, заключается въ томъ что отъ всякаго дѣленія

мы переходимъ къ слѣдующему, дѣля интервалы предыдущаго дѣленія пополамъ.

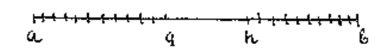
Но мы можемъ переходить отъ одного дѣленія къ слѣдующему раздѣляя подынтервалы предыдущаго дѣленія не пополамъ, а на какое угодно число частей, какъ равныхъ, такъ и неравныхъ.

Наконецъ мы можемъ переходить отъ стараго дѣленія къ новому дѣленію, не удерживая ни одной точки стараго дѣленія. Такъ, напримѣръ, мы можемъ въ первый разъ раздѣлить основаніе трапеціи пополамъ; затѣмъ при второмъ дѣленіи мы раздѣлимъ основаніе на три равныхъ части при третьемъ-раздѣлимъ на четыре части и т.д. Слѣдовательно мы каждый разъ дѣлимъ основаніе трапеціи на равныя части, но такъ, что при переходѣ отъ одного дѣленія къ слѣдующему число частей возрастаетъ на единицу. Въ такомъ случаѣ при каждомъ дѣленіи всѣ точки дѣленія будутъ не тѣ, которыя служили точками дѣленія при предыдущемъ дѣленіи, и въ то же время ясно что при такомъ переходѣ отъ одного дѣленія къ другому величина λ т. е. длина наибольшаго промежутка имѣетъ предѣломъ нуль.

Очевидно, что можно придумать и иные законы такого послѣдовательнаго перехода отъ одного дѣленія къ слѣдующему, чтобы λ безконечно умалялось. Вообще исчерпать всѣ подобные законы не въ состояніи никакое воображеніе.

Предположимъ же, что мы выбрали какой-либо законъ такого перехода отъ одного дѣленія къ слѣдующему, что λ безконечно умаляется.

Обратимъ теперь вниманіе на слѣдующее обстоятельство. когда мы дѣлимъ основаніе трапеціи на подынтервалы, то, чѣмъ меньше длина λ наибольшаго подынтервала, тѣмъ вообще говоря, больше число самихъ подынтерваловъ, а слѣдовательно тѣмъ больше и число точекъ дѣленія. Поэтому, если, при переходѣ отъ одного дѣленія къ слѣдующему, величина λ безконечно умаляется, то очевидно, что число точекъ дѣленія безконечно возрастаетъ И вотъ на первый взглядъ казалось бы, что требованіе, чтобы величина λ безконечно умалялась, можно было бы замѣнить требованіемъ, чтобы число точекъ дѣленія безконечно возрастало. Но легко видѣть, что такая замѣна не возможна. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ, напримѣръ основной интервалъ на три части точками g и h, мы могли бы затѣмъ переходить отъ каждаго дѣленія къ слѣдующему, дѣля пополамъ, за исключеніемъ интервала (g, h), каждый интервалъ предыдущаго дѣ



ленія. При этомъ, очевидно, число точекъ дѣленія будетъ безконечно возрастать, но для всякаго дѣленія интервалъ (g, h) будетъ наибольшимъ, а слѣдовательно величина λ, равная его длинѣ, не будетъ безконечно умаляться. Въ виду этого нашу теорему можно формулировать такъ

ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦІИ РАВНА ПРЕДѢЛУ СУММЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВЪ, ВЪ ПРЕДПОЛОЖЕНІИ, ЧТО ЧИСЛО ТОЧЕКЪ ДѢЛЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНО ВОЗРАСТАЕТЪ ТАКЪ, ЧТО ДЛИНА НАИБОЛЬШАГО ПРОМЕЖУТКА МЕЖДУ НИМИ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЕТСЯ.

Но въ такомъ случаѣ площади элементарныхъ прямоугольниковъ будутъ тоже безконечно умаляться, а потому мы можемъ нашу теорему короче формулировать и такъ

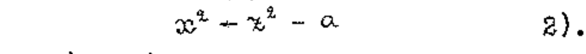
ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦІИ РАВНА ПРЕДѢЛУ СУММЫ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВЪ ВЪ БЕЗКОНЕЧНО ВОЗРАСТАЮЩЕМЪ ЧИСЛѢ.

ПЛОЩАДЬ ЭЛЛИПСА.

Какъ примѣръ вычислимъ площадь эллипса, даннаго уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad 1).$$

Одновременно съ нимъ разсматриваемъ кругъ построенный на большей оси, какъ на діаметрѣ Уравненіе этого круга, если черезъ z обозначимъ его ординату, будетъ



$$x^2 + z^2 = a \qquad 2).$$

Изъ 1) и 2) слѣдуетъ, что

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{a} \qquad 3).$$

т.е. ордината эллипса относится къ соотвѣтствующей ординатѣ круга, какъ малая ось къ большей.

Дѣлимъ точками $x_1, x_2, x_3, \dots$ большую полуось на подынтервалы и строимъ внутренніе элементарные прямоугольники какъ для эллипса, такъ и для круга. Пусть

$$u, \; u_2, u_3, \qquad u_n$$

площади элементарныхъ прямоугольниковъ, принадлежащихъ эллипсу, и σ ихъ сумма. Черезъ ρ обозначимъ сумму элементарныхъ прямоугольниковъ, принадлежащихъ кругу, и пусть

ихъ площади.

Площади двухъ прямоугольниковъ съ равными основаніями относятся какъ высоты, а потому

$$u_0 = \frac{b}{a} v_0$$
$$u = \frac{b}{a} v$$
$$u_2 = \frac{b}{a} v_2$$

$$u_{n-1} = \frac{b}{a} v_{n-1}$$

Складывая эти равенства, получимъ

$$p = \frac{b}{a} p'$$

Переходя къ предѣлу, имѣемъ

$$\lim p = \frac{b}{a} \cdot \lim p'$$

слѣдовательно если $Э$ площадь эллипса

$$\frac{1}{4} Э = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4}$$

откуда заключаемъ что $Э = \pi ab$

ГЛАВА I. ОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ

Условимся въ нижеслѣдующихъ обозначеніяхъ.

Подъ a и b мы будемъ разумѣть двѣ произвольно взятыхъ постоянныхъ величины. Возможны два случая или $a < b$ или $a > b$.

Между этими двумя величинами мы вставляемъ рядъ произвольно выбранныхъ промежуточныхъ чиселъ

$$x \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \qquad \qquad x_{n-3} \quad x_{n-2} \quad x_n \qquad 1),$$

которыя будемъ называть числами x_k. Въ виду симметріи, положимъ

$$x_0 = a, \quad x_n = b$$

Каждое изъ чиселъ x_k, равно какъ и ихъ число, берется совершенно произвольно, съ единственнымъ ограниченіемъ рядъ 1) долженъ давать рядъ возрастающихъ чиселъ если $a < b$ и рядъ убывающихъ чиселъ если $a > b$. Слѣдовательно, это есть такъ называемый монотонный рядъ чиселъ

Когда выбраны числа x_k то ими весь промежутокъ (a b) разобьется на нѣсколько меньшихъ промежутковъ

$$(a\ x)\ (x\ x_2)\ (x_2\ x_3), \ldots \quad (x_k, x_{k+1}) \ldots \quad (x_n\ b)$$

Въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ мы выберемъ тоже совер-

шенно произвольно, какое нибудь число. То число, которое выбрано въ промежуткѣ $(x_k\ x_{k+1})$ обозначаемъ символомъ ξ_k. Получимъ систему чиселъ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{n-1}$

Каждое число ξ_k необходимо должно быть промежуточнымъ между x_k и x_{k+1}, но не исключается возможность того, что оно совпадаетъ или съ x_k или съ x_{k+1}.

Взаимное соотношеніе между числами x_k и ξ_k можно схематически представить такъ

$$a\ \xi_0\ x_1\ \xi_1\ x_2\ \xi_2\ x_3 \ldots\ x_k\ \xi_k\ x_{k+1} \ldots\ x_{n-2}\ \xi_{n-2}\ x_{n-1}\ \xi_{n-1}\ b$$

Если же мы изобразимъ числа точками на оси абсциссъ, то, смотря по тому, какое изъ двухъ чиселъ a и b больше, мы получимъ слѣдующіе геометрическіе образы

$\xi_0\ \ \xi_1\ \ \xi_2\ \ \ldots\ \ \xi_k\ \ \ldots\ \ \xi_{n-1}$ / $a\ \ x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_k\ \ x_{k+1}\ \ \ldots\ \ x_n\ \ b$

$\xi_{n-1}\ \ \xi_{n-2}\ \ \ldots\ \ \xi_k\ \ \ldots\ \ \xi_1\ \ \xi_0$ / $b\ \ x_{n-1}\ \ x_{n-2}\ \ \ldots\ \ x_{k+1}\ \ x_k\ \ \ldots\ \ x_2\ \ x_1\ \ a$

Въ виду этого мы будемъ называть числа x_k точками дѣленія, и будемъ говорить, что точки x_k дѣлятъ основной интервалъ на подинтервалы (x_k, x_{k+1}) Выражаясь же геометрическимъ языкомъ, мы можемъ сказать, что выборъ чиселъ x_k и ξ_k совершается слѣдующимъ образомъ: основной интервалъ $(a\ b)$ дѣлится произвольными точками дѣленія x_k на нѣкоторое число подинтерваловъ, въ каждомъ изъ которыхъ затѣмъ отмѣчается, тоже совершенно произвольно, какая нибудь точка ξ_k.

Вообразимъ теперь, что перемѣнная величина x переходитъ отъ значенія a къ значенію b, принимая послѣдовательно значенія, равныя выбраннымъ промежуточнымъ числамъ x_k.

Когда x переходитъ отъ значенія x_k къ значенію x_{k+1}, то онъ получаетъ приращеніе, равное разности $x_{k+1} - x_k$. Эту разность мы будемъ обозначать символомъ Δx_k

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

Такимъ образомъ, выбравъ рядъ промежуточныхъ чиселъ $x_1\ x_2 \ldots x_{n-1}$ мы тѣмъ самымъ получаемъ рядъ разностей

$$x_1 - a,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2, \ldots\ldots\ x_{n-1} - x_{n-2},\ b - x_{n-1}$$

короче обозначаемыхъ символами

$$\Delta x_0,\ \Delta x_1,\ \Delta x_2 \ \ldots\ \Delta x_{n-2}, \Delta x_{n-1}.$$

Эти разности, очевидно, будутъ положительны, если $a < b$, и отрицательны, если $a > b$. Слѣдовательно, всѣ эти разности всегда имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, причемъ абсолютная величина каждой

разности Δx_k, очевидно, равна длинѣ подынтервала (x_k, x_{k+1}). Если же мы условимся считать длину этого отрѣзка положительной или отрицательной, смотря потому, лежитъ ли точка x_{k+1} правѣе или лѣвѣе точки x_k, то длина интервала $(x_k \quad x_{k+1})$ будетъ ра а какъ разъ Δx_k.

Абсолютную длину наибольшаго подынтервала обозначимъ черезъ λ.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНІЕ СУММЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВЪ

Мы доказали, что площадь кривой трапеціи равна предѣлу су S безконечно умаляющихся элементарныхъ прямоугольниковъ въ без конечно возрастающемъ числѣ.

Посмотримъ, какимъ аналитическимъ выраженіемъ можетъ быть представлена эта сумма.

Примемъ основаніе трапеціи за ось x и пусть $y=f(x)$ урав неніе данной кривой.

Раздѣливъ основаніе трапеціи на подынтервалы точками x_k и выбравъ въ каждомъ изъ полученныхъ подынтерваловъ точку ξ_k строимъ элементарные прямоугольники, высотами которыхъ служатъ ординаты точекъ ξ_k.

Первый элементарный прямоугольникъ имѣетъ основаніемъ отр зокъ, длина котораго равна x - высота же его равна значенію функціи $f(x)$ при $x-\xi_0$, потому площадь его равна

$$f(\xi_0)(x \quad a)$$

Основаніе второго элементарна треугольника равно $x_2 - x$ высота же его равна $f(\xi_1)$ а пот площадь его равна

$$f(\xi)(x_2 - x)$$

Вообще очевидно, что высота какого-нибудь прямоугольник основаніемъ котораго служитъ интервалъ (x_k, x_{k+1}) равна $f($ а потому площадь его равна

$$f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Послѣдній прямоугольникъ имѣетъ основаніемъ интервалъ $(x_n$

[illegible]

$$f(\xi_{n-1})(b \quad _{n-1})$$

Поэтому, если S сумма площадей всѣхъ элементарныхъ прямоугольниковъ, то

$$S = f(\xi_0)(x - a) + f(\xi)(x_2 \ x) + f(\xi_2)(x_3 - x_2) + \qquad + f(\xi_n)(b - x_n)$$

Мы будемъ называть эту сумму интегральной суммой, и такъ какъ площадь трапеціи равна предѣлу этой суммы, то, слѣдовательно, геометрическая задача о вычисленіи площадей преобразуется въ слѣдующую аналитическую задачу. мы должны найти методы, которые давали бы возможность вычислять предѣлы интегральныхъ суммъ. Къ изслѣдованію подобныхъ суммъ съ чисто аналитической точки зрѣнія мы теперь и перейдемъ, но замѣтимъ, что къ аналитическому выраженію суммы S мы пришли, разсматривая кривую, которая всѣми своими точками лежитъ выше оси x. Въ такомъ случаѣ геометрическое значеніе этой суммы, а также ея предѣла, чрезвычайно просты. сама сумма S равна суммѣ площадей элементарныхъ прямоугольниковъ, а предѣлъ ея равенъ площади трапеціи

Но если кривая всѣми точками лежитъ выше оси x, то функція $f(x)$ принимаетъ только положительныя значенія.

Мы теперь разсмотримъ, каково геометрическое значеніе суммы S и ея предѣла въ томъ случаѣ, когда функція $f(x)$ можетъ принимать не только положительныя, но и отрицательныя значенія, а также разсмотримъ и тотъ случай, когда a не меньше b, какъ мы до сихъ поръ неявно предполагали, но больше

ОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ.

Пусть же $f(x)$ какая угодно, произвольно данная функція, непрерывная въ нѣкоторомъ промежуткѣ $(a \ b)$, и пусть

$$S \ f(\xi_0)(x - a) + f(\xi_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x_3 \ x_2) - \qquad + f(\xi_{n-1})(b - x_n)$$

Нѣсколько короче мы можемъ представить эту сумму такъ

$$S = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \qquad + f(\xi_n)\Delta x_{n-1}$$

но обыкновенно мы ее будемъ изображать слѣдующимъ образомъ

$$S = \sum_a^b f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

или, еще короче, такъ

$$S = \sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k$$

Такое обозначеніе при всей своей краткости, чрезвычайно

удобно Символъ $\sum$, который есть не что иное, какъ прописная греческая буква сигма вообще употребляется въ математикѣ какъ символъ суммы. Вслѣдъ за нимъ стоитъ выраженіе

$$f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

которое своимъ видомъ должно напоминать, каковы слагаемыя разсматриваемой суммы. Наконецъ внизу и вверху символа суммы стоятъ тѣ данныя величины a и b , между которыми вставляются промежуточныя числа x_k, и которыя мы будемъ называть пределами суммы; изъ нихъ a - нижній предѣлъ, b - верхній предѣлъ.

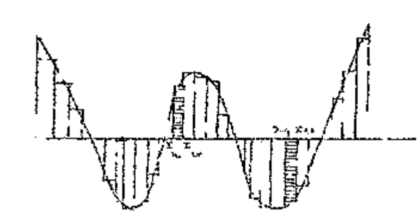
Разсмотримъ геометрическое значеніе суммы S. Предположимъ сначала, что $a < b$. Строимъ кривую и соотвѣтствующіе элементарные прямоугольники. Одни изъ нихъ будутъ лежать выше оси x ,другіе ниже

Слагаемыя суммы

$$S = \sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k$$

можно раздѣлить на два класса на положительныя и отрицательныя. Разсмотримъ геометрическое значеніе тѣхъ и другихъ Пусть

$$f(\xi_h)\Delta x_h$$



какое нибудь положительное слагаемое. Такъ какъ $a<b$, то Δx_h положительно, слѣдовательно, и первый множитель $f(\xi_h)$ тоже положителенъ, а потому величина слагаемаго очевидно равна площади элементарнаго прямоугольника, который весь расположенъ выше оси x Слѣдовательно сумма всѣхъ положительныхъ слагаемыхъ равна суммѣ площадей всѣхъ тѣхъ элементарныхъ прямоугольниковъ, которые расположены выше оси x .

Разсмотримъ теперь какое-нибудь отрицательное слагаемое

$$f(\xi_q)\Delta x_q$$

у котораго, слѣдовательно, множитель $f(\xi_q)$ отрицателенъ.

Прямоугольникъ, основаніемъ котораго служитъ отрѣзокъ (x_q x_{q+1}), расположенъ ниже оси x , и высота его, какъ геометрическая величина, равна $-f(\xi_q)$, а потому площадь его равна:

$$-f(\xi_q)\Delta x_q$$

Слѣдовательно абсолютная величина всякаго отрицательнаго слагаемаго суммы S равна площади элементарнаго прямоугольника, расположеннаго ниже оси x Очевидно, что сумма всѣхъ отрицательныхъ.

слагаемыхъ тоже отрицательна и равна, по абсолютной величинѣ, суммѣ площадей элементарныхъ прямоугольниковъ, расположенныхъ ниже оси x.

Ясно теперь, что если мы черезъ S_1 обозначимъ сумму всѣхъ тѣхъ элементарныхъ прямоугольниковъ, которые лежатъ выше оси x, а черезъ S_2 сумму лежащихъ ниже оси x, то

$$S = S_1 \quad S_2$$

а потому, если предположимъ, что число промежуточныхъ точекъ x_k безконечно возрастаетъ такъ, что h, наибольшій промежутокъ между ними, безконечно умаляется, то

$$\lim S = \lim S_1 - \lim S_2$$

Но S_1 есть сумма элементарныхъ прямоугольниковъ лежащихъ выше оси x поэтому ея предѣлъ равенъ суммѣ всѣхъ тѣхъ площадей, которыя ограничены снизу осью x, а сверху тѣми частями данной кривой, которыя расположены выше оси x

Также ясно, что предѣлъ суммы S_2 равенъ суммѣ площадей ограниченныхъ осью x и тѣми частями кривой, которыя лежатъ ниже оси x.

Поэтому, если черезъ $u_1, u_2, u_3, \ldots$ обозначимъ тѣ площади, ограниченныя кривой, которыя лежатъ выше оси x, а черезъ $v_1, v_2, v_3 \ldots$ тѣ которыя лежатъ ниже, то

$$\lim S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$
$$\lim S_2 = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

а потому

$$\lim S = u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + u_3 - v_3 + u_4 - \ldots$$

Это равенство легко выразить въ словесной формѣ, если ввести само собою напрашивающееся условіе: будемъ считать отрицательными тѣ площади, которыя лежатъ ниже оси. Такъ, какъ ординаты тѣхъ частей кривой, которыя ограничиваютъ эти площади, отрицательны, то, слѣдовательно, мы считаемъ площади положительными или отрицательными, смотря потому, положительны или отрицательны ординаты точекъ этихъ площадей.

Еще нагляднѣе это условіе можно формулировать такъ: вообразимъ подвижную точку M, которая движется по кривой, увлекая свою ординату слѣва на-право. Мы будемъ считать положительными тѣ площади, которыя пробѣгаются положительными ординатами, и отрицательными тѣ площади, которыя пробѣгаются отрицательными ординатами

Принявъ это условие мы можемъ высказать слѣдующее заключение:

ПРЕДѢЛЪ СУММЫ S РАВЕНЪ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММѢ ТѢМЪ ПЛОЩАДЕЙ, КОТОРЫЯ ПРОВЕДЕНЫ ОРДИНАТОЙ КРИВОЙ.

Такимъ образомъ мы не только доказали, что сумма S имѣетъ предѣлъ, но и нашли, чему онъ равенъ. Однако этого мы достигли предполагая, что $a < b$. Пусть же теперь $a > b$

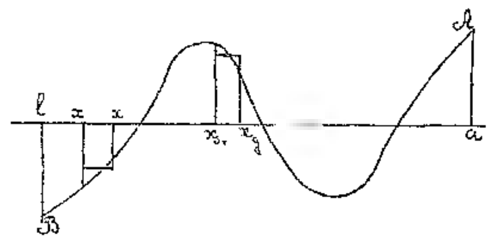
Въ данномъ случаѣ всѣ разности Δx_k будутъ отрицательны потому что числа

$$a, x_1, x_2, x_3 \quad x_{n-1}, b$$

образуютъ убывающій рядъ. Поэтому какое-нибудь слагаемое суммы S, напримѣръ слагаемое

$$f(\xi_k)\Delta x_k$$

будетъ положительнымъ только тогда, когда множитель $f(\xi_k)$ отрицателенъ. Слѣдовательно, соотвѣтствующій элементарный прямоугольникъ будетъ расположенъ ниже оси x. Если же мы возьмемъ какое-нибудь отрицательное слагаемое



$$f(\xi_y)\Delta x_y$$

то соотвѣтствующій элементарный прямоугольникъ уже будетъ лежать выше оси x. Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ сумма положительныхъ слагаемыхъ равна суммѣ элементарныхъ прямоугольниковъ, лежащихъ ниже оси x; абсолютная же величина суммъ отрицательныхъ слагаемыхъ равна суммѣ элементарныхъ прямоугольниковъ, расположенныхъ выше оси. Поэтому, обозначая по прежнему черезъ S_1 и S_2 суммы площадей элементарныхъ прямоугольниковъ, соотвѣтственно расположенныхъ выше и ниже оси x мы въ разсматриваемомъ случаѣ имѣемъ.

$$S = -S_1 + S_2$$
$$\lim S = -\lim S_1 + \lim S_2$$

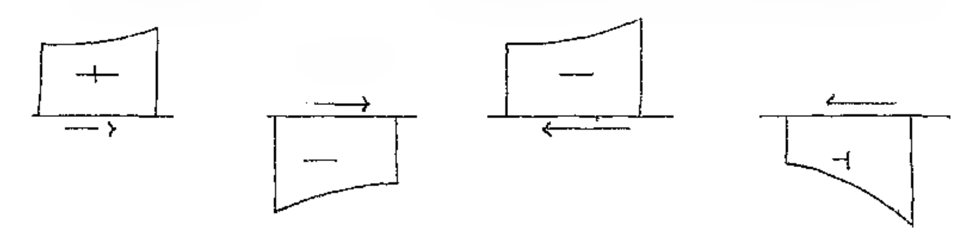
Мы видимъ что изъ площадей, ограниченныхъ частями данной кривой теперь выгодно условиться считать отрицательными тѣ, которыя лежатъ выше оси x, а положительными тѣ, которыя лежатъ ниже оси x, ... выгодно ... условія, повидимому противоположныя ранѣе принятымъ нами условіямъ. Но замѣтимъ, что теперь начало кривой A лежитъ правѣе конца ея B. Поэтому при движе-

нія точки по кривой отъ начала ея къ концу, ордината ея движется не слѣва направо, какъ то было раньше, а справа налѣво.

Раньше мы условились считать площади положительными или отрицательными смотря потому, описываются ли онѣ положительными или отрицательными ординатами, но при этомъ предполагалось, что сама ордината движется слѣва направо т.е. въ положительномъ направленіи по оси x.

Теперь мы къ этому условію добавимъ новое: мы будемъ считать, что если ордината движется справа налѣво, то тогда площадь описываемая положительной ординатой, отрицательна, а площадь, описываемая отрицательной ординатой, положительна. При такомъ условіи и въ томъ случаѣ, когда $a > b$ мы можемъ сказать, что предѣлъ суммы S равенъ алгебраической суммѣ площадей, описываемыхъ ординатой кривой.

Заключеніе прежнее: различіе только въ томъ, что когда $a < b$ то ордината движется въ положительномъ направленіи оси x, а когда $a > b$, то движеніе ординаты совершается въ сторону отрицательнаго направленія оси x. Вообще же условія относительно знака площадей ясны изъ слѣдующихъ чертежей, гдѣ стрѣлка указываетъ направленіе движенія ординаты.



Въ дальнѣйшемъ алгебраическую сумму площадей, пробѣгаемыхъ ординатой, мы будемъ просто называть площадью, описываемой данной ординатой.

Всѣ предыдущія изслѣдованія позволяютъ намъ теперь высказать слѣдующую основную теорему:

ЕСЛИ ИМѢЕМЪ ФУНКЦІЮ $f(x)$, НЕПРЕРЫВНУЮ ВЪ ИНТЕРВАЛѢ (a, b) МЫ РАЗДѢЛИМЪ ЭТОТЪ ИНТЕРВАЛЪ НА ПОДИНТЕРВАЛЫ ПРОИЗВОЛЬНО ВЗЯТЫМИ ТОЧКАМИ $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ И ВЪ КАЖДОМЪ ПОДИНТЕРВАЛѢ (x_k, x_{k+1}) ВОЗЬМЕМЪ ПРОИЗВОЛЬНО ЖЕ ТОЧКУ ξ_k ТО СУММА

$$S = f(\xi_0)(x_1-a)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+f(\xi_2)(x_3-x_2)+\ldots+f(\xi_n)(b-x_n)$$

КОРОЧЬ ОБОЗНАЧАЕМАЯ ТАКЪ:

$$S=\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k$$

И НАЗЫВАЕМАЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММОЙ, ОБЛАДАЕТЪ СЛѢДУЮЩИМЪ СВОЙСТВОМЪ:

ЕСЛИ ЧИСЛО ПРОМЕЖУТОЧНЫХЪ ТОЧЕКЪ x_k БЕЗКОНЕЧНО ВОЗРАСТАЕТЪ ТАКЪ, ЧТО НАИБОЛЬШІЙ ПРОМЕЖУТОКЪ МЕЖДУ НИМИ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЕТСЯ, ТО СУММА S СТРЕМИТСЯ КЪ ЕДИНСТВЕННОМУ ВПОЛНѢ ОПРЕДѢЛЕННОМУ ПРЕДѢЛУ, РАВНОМУ ПЛОЩАДИ, ПРОСТИРАЕМОЙ ОРДИНАТОЙ КРИВОЙ, УРАВНЕНІЕ КОТОРОЙ $y=f(x)$

Слѣдовательно, эта теорема даетъ намъ два факта первый фактъ тотъ, что сумма S имѣетъ предѣлъ, второй же фактъ тотъ что этотъ предѣлъ не зависитъ ни отъ выбора точекъ x_k, ни отъ выбора точекъ ξ_k лишь бы наибольшій промежутокъ въ предѣлѣ равнялся нулю

Опираясь же на это свойство суммы S, мы можемъ ввести теперь понятіе объ такъ называемомъ опредѣленномъ интегралѣ

ОПРЕДѢЛЕНІЕ: ПРЕДѢЛЪ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ

$$S=\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k$$

НАЗЫВАЕТСЯ ОПРЕДѢЛЕННЫМЪ ИНТЕГРАЛОМЪ ОТЪ ФУНКЦІИ $f(x)$; ПРЕДѢЛЫ ЖЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ, т.е. a и b НАЗЫВАЮТСЯ ПРЕДѢЛАМИ ИНТЕГРАЛА: a – НИЖНИМЪ, b – ВЕРХНИМЪ

Слѣдовательно, если

$$A=\lim\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k$$

то A есть опредѣленный интегралъ функціи $f(x)$.

Чтобы понять, почему введенъ терминъ ИНТЕГРАЛЪ надо имѣть въ виду слѣдующее: Термины „дифференцированіе" и „интегрированіе" уже очень давно употребляются въ наукѣ въ весьма широкомъ смыслѣ. Подъ дифференцированіемъ разумѣютъ тотъ моментъ въ процессѣ изслѣдованія, когда изслѣдуемый предметъ, или явленіе, разлагаютъ на отдѣльныя части, чтобы тѣмъ самымъ получить возможность изслѣдовать его по частямъ. Послѣ того, какъ отдѣльныя части предмета изслѣдованы, тогда, чтобы получить понятіе обо всемъ предметѣ, мы должны связать отдѣльныя изслѣдованія въ одно цѣлое. Этотъ процессъ называется интегрированіемъ. Отсюда терминъ „интегралъ" для результата интегрированія. Тотъ же отдѣлъ математики, который изслѣдуетъ свойства интеграловъ, получилъ

названіе интегральнаго исчисленія.

Для обозначенія опредѣленнаго интеграла въ настоящее время принятъ символъ, очень хорошо напоминающій происхожденіе этого понятія. Пусть по прежнему

$$A=\lim S=\lim\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k \qquad 1)$$

Общій типъ слагаемыхъ интегральной суммы слѣдующій:

$$f(\xi_k)\Delta x_k$$

т. е. каждое слагаемое равно произведенію значенія функціи на нѣкоторое приращеніе аргумента. Слѣдовательно, чтобы получить какое нибудь слагаемое, надо въ выраженіи

$$f(x)\Delta x$$

дать x и Δx нѣкоторыя опредѣленныя значенія. Поэтому мы можемъ сказать, что сумма S есть сумма слагаемыхъ типа $f(x)\Delta x$ и слѣдовательно можемъ замѣнить равенство 1) такимъ

$$A=\lim\sum_a^b f(x)\Delta x \qquad 2)$$

что надо буквально читать такъ: A есть предѣлъ суммы слагаемыхъ типа $f(x)\Delta x$. Вспоминая же, что дифференціалъ независимаго переменнаго равенъ приращенію его, мы можемъ представить равенство 2) въ такомъ видѣ

$$A=\lim\sum_a^b f(x)dx$$

Введемъ теперь послѣднее упрощеніе: въ правой части этого равенства мы опустимъ символъ "$\lim$", и чтобы не забывать, что дѣло идетъ не о самой суммѣ S, а объ ея предѣлѣ, мы вмѣсто символа $\sum$ будемъ писать символъ

$$\int$$

который носитъ названіе знака интеграла, и есть не что иное какъ старинное удлиненное латинское S *). Тогда получимъ:

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

что буквально надо читать такъ: A равно предѣлу суммы слагаемыхъ типа $f(x)dx$. Такъ, приблизительно, исторически произошло обозначеніе интеграла.

Опредѣленный интегралъ отъ функціи $f(x)$ между предѣлами a и b обозначается такъ:

$$\int_a^b f(x)dx$$

---

*) *Начальная буква слова Summa (сумма)*

гдѣ a и b его нижній и верхній предѣлы. Функція $f(x)$ называется подынтегральной функціей.

Такимъ образомъ мы имѣемъ слѣдующее основное равенство, которое по существу есть не что иное, какъ опредѣленіе опредѣленнаго интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_a^b f(x)\Delta x,$$

причемъ, какъ мы видѣли, геометрически опредѣленный интегралъ равенъ площади пробѣгаемой ординатой кривой, изображающей подынтегральную функцію, при измѣненіи аргумента функціи отъ нижняго предѣла интеграла до верхняго. Итакъ: опредѣленнымъ интеграломъ, взятымъ по данному интервалу (a b), называется предѣлъ суммы всѣхъ тѣхъ произведеній, которыя получимъ, если основной интервалъ раздѣлимъ на подынтервалы и длину каждаго изъ нихъ помножимъ на значеніе функціи въ произвольно взятой точкѣ этого подынтервала. При переходѣ къ предѣлу предполагается что наибольшая длина изъ подъ-интерваловъ безконечно умаляется. Поэтому по опредѣленію

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k$$

ИНТЕГРАЛЪ КАКЪ ФУНКЦІЯ ПРЕДѢЛОВЪ.

За верхній и нижній предѣлъ интеграла можно брать какія угодно величины a и b, лишь бы данная функція была непрерывна въ промежуткѣ между ними. Поэтому въ равенствѣ

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

мы можемъ давать символамъ a и b различныя числовыя значенія. Но если на a и b мы будемъ смотрѣть какъ на символы, могущіе принимать различныя числовыя значенія, то съ этой точки зрѣнія они являются перемѣнными величинами, причемъ очевидно что справедливо слѣдующее заключеніе:

Всякій разъ какъ a и b принимаютъ опредѣленныя числовыя значенія, величина A тоже принимаетъ опредѣленное значеніе.

Но въ такомъ случаѣ, согласно общему опредѣленію функціи

величина A есть функція величинъ a и b. Слѣдовательно ОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ ЕСТЬ ФУНКЦІЯ СВОИХЪ ПРЕДѢЛОВЪ.

Каковы свойства этой функціи и въ какихъ отношеніяхъ она стоитъ къ данной функціи, это будетъ изучено нами въ дальнѣйшемъ.

ИНТЕГРАЛЪ КАКЪ ПРЕДѢЛЪ РАЗЛИЧНЫХЪ СУММЪ.

Удерживая прежнія обозначенія, мы имѣемъ слѣдующее основное равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \lim\{f(\xi_0)(x_1-a)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+f(\xi_2)(x_3-x_2)+\dots+f(\xi_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})+f(\xi_{n-1})(b-x_{n-1})\} \qquad (1)$$

Отмѣтимъ частные случаи этого равенства, которые получимъ, ограничивая свободу выбора чиселъ x_k и ξ_k.

Полагая каждое ξ_k равнымъ x_k, получимъ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim\{f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2)+\dots+f(x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})+f(x_{n-1})(b-x_{n-1})\} \qquad (2)$$

Принимая же каждое ξ_k равнымъ x_{k+1}, найдемъ, что

$$\int_a^b f(x)dx = \lim\{f(x_1)(x_1-a)+f(x_2)(x_2-x_1)+f(x_3)(x_3-x_2)+\dots+f(x_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})+f(b)(b-x_{n-1})\} \qquad (3)$$

наконецъ, мы можемъ органичить выборъ чиселъ x_k выбирая ихъ такъ, чтобы промежутки между ними были равными. Предполагая же, что интервалъ (a, b) раздѣленъ на n равныхъ частей и обозначая длину каждой изъ этихъ частей черезъ h, такъ что

$$h=\frac{b-a}{n}$$

мы имѣемъ

$$x_1-a=x_2-x_1=x_3-x_2=\dots=b-x_{n-1}=h,$$

благодаря чему равенства 2) и 3) принимаютъ слѣдующій видъ

$$\int_a^b f(x)dx=\lim h\{f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-2})+f(x_{n-1})\} \qquad (4)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim h\{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\dots+f(x_{n-1})+f(b)\} \qquad (5)$$

Но ясно, что теперь

$a \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n-1} \quad b$

$$x_1=a+h,\quad x_2=a+2h,\quad x_3=a+3h,\quad \dots\quad b=a+nh,$$

а потому равенства 4) и 5) преобразуются въ слѣдующія

$$\int_a^b f(x)dx=\lim h\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\dots+f[a+(n-1)h]\} \qquad (6)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim h\{f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)+\dots+f(a+nh)\} \qquad (7)$$

Переходъ къ предѣлу заключается въ томъ, что h безконечно уменьшается благодаря безконечному возрастанію n. Такъ какъ

$$h = \frac{b-a}{n}$$

то равенство 6) можно переписать и въ такомъ видѣ

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f[a+(n-1)h]}{n} \qquad (8)$$

Мы скоро воспользуемся этимъ равенствомъ.

Интегралы $\int_a^b \sin x\,dx$, $\int_a^b \cos x\,dx$

Если опредѣленный интегралъ вычисляютъ какъ предѣлъ интегральной суммы, то говорятъ, что его вычисляютъ непосредственно. Какъ примѣръ такого вычисленія вычислимъ интегралы

$$\int_a^b \sin x\,dx \quad \int_a^b \cos x\,dx.$$

Для этого вычислимъ предварительно слѣдующую сумму:

$$S = \sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin[a+(n-1)h] \qquad (1)$$

Множимъ обѣ части на $2\sin h$. Пользуясь равенствомъ

$$2\sin v \sin u = \cos(u-v) - \cos(u+v)$$

легко найдемъ, что

$$2\sin h \sin a = \cos(a-h) - \cos(a+h)$$
$$2\sin h \sin(a+h) = \cos a - \cos(a+2h)$$
$$2\sin h \sin(a+2h) = \cos(a+h) - \cos(a+3h)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\sin h \sin(a+\overline{n-2}\,h) = \cos(a+\overline{n-3}\,h) - \cos(a+\overline{n-1}\,h)$$
$$2\sin h \sin(a+\overline{n-1}\,h) = \cos(a+\overline{n-2}\,h) - \cos(a+nh)$$

Складывая эти равенства, получимъ

$$2(\sin h)S = \cos(a-h) + \cos a - \cos(a+\overline{n-1}\,h) - \cos(a+nh) =$$
$$= 2\cos\frac{h}{2}\cos\left(a-\frac{h}{2}\right) - 2\cos\frac{h}{2}\cos\left(a+nh-\frac{h}{2}\right)$$

Слѣдовательно

$$S = \frac{\cos\left(a-\frac{h}{2}\right) - \cos\left(a+nh-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$$

Принимая во вниманіе 1), заключаемъ, что

$$\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin[a+(n-1)h] = \frac{\cos\left(a-\frac{h}{2}\right) - \cos\left(a+nh-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} \qquad (2)$$

Замѣняя же здѣсь a черезъ $\frac{\pi}{2}+a$, получимъ

$$\cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \ldots + \cos[a+(n-1)h] = \frac{\sin\left(a+nh-\frac{h}{2}\right) - \sin\left(a-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} \qquad (3)$$

Съ этими равенствами часто приходится встрѣчаться, поэтому не мѣшаетъ ихъ замѣтить.

Возьмемъ теперь общую формулу (стр. 25)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h=0} h\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\dots+f[a+(n-1)h]\} \qquad (4)$$

гдѣ

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad b = a+nh$$

Замѣняя здѣсь $f(x)$ сначала черезъ $\sin x$, потомъ черезъ $\cos x$ получимъ

$$\int_a^b \sin x\,dx = \lim_{h=0} h\{\sin a+\sin(a+h)+\dots+\sin[a+(n-1)h]\}$$

$$\int_a^b \cos x\,dx = \lim_{h=0} h\{\cos a+\cos(a+h)+\dots+\cos[a+(n-1)h]\}$$

Принимая во вниманіе 2) и 3), найдемъ, что

$$\int_a^b \sin x\,dx = \lim_{h=0}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(b-\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$\int_a^b \cos x\,dx = \lim_{h=0}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\sin\left(b-\frac{h}{2}\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right)\right]$$

а окончательно

$$\int_a^b \sin x\,dx = -\cos b+\cos a, \qquad \int_a^b \cos x\,dx = \sin b-\sin a$$

Задача. Доказать, пользуясь равенствомъ 4), что

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}, \qquad \int_a^b dx = b-a$$

ИНТЕГРАЛЪ СЪ РАВНЫМИ ПРЕДѢЛАМИ

До сихъ поръ мы предполагали, что предѣлы интеграла a и b не равны между собою. Но нерѣдко приходится разсматривать интегралы съ равными предѣлами. Очевидно, что для такихъ интеграловъ прежнее опредѣленіе не годится, хотя бы потому, что если a равно b, то между ними нельзя вставить промежуточныхъ чиселъ. Необходимо дать новое опредѣленіе, которое въ тоже время находилось бы въ нѣкоторой связи съ прежнимъ. Этого мы достигнемъ, если воспользуемся геометрическимъ значеніемъ интеграла. Интегралъ

$$\int_a^b f(x)dx$$

пока a не равно b, геометрически представляется площадью трапеціи $aABb$. Эта площадь, если b будетъ приближаться къ a и наконецъ совпадетъ съ a, обратится въ нуль, а потому

ЕСЛИ ПРЕДѢЛЫ ИНТЕГРАЛА РАВНЫ МЕЖДУ СОБОЮ, ТО ИНТЕГРАЛЪ УСЛОВНО ПРИНИМАЕТСЯ РАВНЫМЪ НУЛЮ

Согласно этому опредѣленію, какое бы ни было c всегда

$$\int_a^c f(x)dx = 0$$

ПЕРЕМѢННОЕ ИНТЕГРАЦІИ.

Необходимо обратить вниманіе на слѣдующій фактъ. хотя опредѣленный интегралъ есть функція своихъ предѣловъ, но онъ никогда не бываетъ функціей аргумента данной функціи. Такъ, напр. если по прежнему

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

то A есть функція a и b, но ни въ какомъ случаѣ не функція x, хотя x и фигурируетъ въ правой части. Но роль его своеобразна. Символъ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

намъ напоминаетъ, что A есть предѣлъ суммы, слагаемыя которой типа $f(x)\Delta x$. Если же мы вспомнимъ, что

$$\int_a^b f(x)dx = \lim S,$$

гдѣ

$$S = f(\xi_0)(x_1 - a) + f(\xi_1)(x_2 - x) + f(\xi_2)(x_3 - x_2) + \dots + f(\xi_{n-1})(b - x_{n-1})$$

то мы ясно видимъ, что въ выраженіе суммы S аргументъ x не входитъ; S зависитъ не отъ x а отъ тѣхъ промежуточныхъ значеній которыя мы выберемъ между a и b, тѣмъ болѣе и предѣлъ суммы S не можетъ быть функціей x мы же знаемъ кромѣ того, что этотъ предѣлъ не зависитъ и отъ выбора промежуточныхъ значеній x_k и ξ_k Такимъ образомъ въ выраженіи

$$\int_a^b f(x)dx$$

вся роль x заключается только въ томъ, чтобы показать, съ помощью какой функціи составленъ данный интегралъ. Поэтому вмѣсто x мы были бы вполнѣ вправѣ написать и иную букву, напр., y или z, и мы имѣли бы что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(z)dz$$

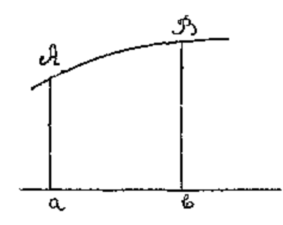
Тотъ символъ, который въ подынтегральномъ выраженіи замѣняетъ аргументъ функціи, называется перемѣнной интеграціи.

Поэтому мы можемъ высказать слѣдующее положеніе:

Опредѣленный интегралъ есть функція своихъ предѣловъ, но не есть функція перемѣннаго интеграціи.

Это особенно становится ясно, если мы вспомнимъ геометрическое значеніе интеграла. Пусть u площадь трапеціи $AabB$. Тогда

$$u = \int_a^b f(x)dx$$



Очевидно, что значеніе u зависитъ отъ того, какъ выбраны точки a и b, но значеніе u совершенно не зависитъ отъ самого x.

Мы также нашли, что

$$\int_a^b \sin x\,dx = \cos b - \cos a$$

$$\int_a^b \cos x\,dx \quad \sin b \quad \sin a$$

Мы видимъ въ правыхъ частяхъ a и b, но не видимъ x. Это потому, что интегралы

$$\int_a^b \sin x\,dx \qquad \int_a^b \cos x\,dx$$

есть функціи a и b, но не функціи x.

ГЛАВА III ОСНОВНЫЯ СВОЙСТВА ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА.

Изученіе основныхъ свойствъ опредѣленнаго интеграла мы начнемъ съ того, что нѣсколько расширимъ понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ. Это расширеніе, не затрагивая существа понятія объ опредѣленномъ интегралѣ касается только той внѣшней формы, въ которой можетъ быть представлено подынтегральное выраженіе.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНІЕ И ЕГО ИНТЕГРАЛЪ.

Если $f(x)$ данная функція и если черезъ $\varphi(x)$ мы обозначимъ какую-нибудь ея первообразную, т.е. такую функцію, что $\varphi'(x) = f(x)$, то

$$f(x)\,dx = d\varphi(x).$$

Слѣдовательно. всякое произведеніе какой-нибудь функціи на дифференціалъ ея аргумента можно всегда разсматривать какъ дифференціалъ нѣкоторой функціи.

Это заключеніе можно нѣсколько расширить. Пусть мы имѣемъ произведеніе какой-нибудь функціи на дифференціалъ другой функціи т.е. произведеніе типа

$$\psi(x)\,d\chi(x)$$

Легко убѣдиться, что такое произведеніе мы тоже всегда можемъ разсматривать какъ дифференціалъ нѣкоторой функціи. Въ самомъ дѣлѣ

[illegible]

, теперь ясно, что если черезъ $\varphi(x)$ мы обозначимъ функцію, производная которой равна $\psi(x)\,\chi'(x)$ то

$$\psi(x)\,d\chi(x) = d\varphi(x)$$

Следовательно всякое произведеніе одной функціи на дифференціалъ другой функціи всегда можно разсматривать какъ дифференціалъ нѣкоторой функціи.

Такимъ образомъ оказывается, что выраженія типа

$$d\varphi(x), \quad f(x)dx, \quad \psi(x)d\xi(x)$$

будучи различны по внѣшней формѣ, по существу представляютъ одно и тоже: каждое изъ нихъ есть дифференціалъ нѣкоторой функціи.

Поэтому эти выраженія часто называютъ дифференціалами.

Если теперь $\varphi'(x) = f(x)$ то подынтегральное выраженіе въ интегралѣ

$$\int_a^b f(x)dx$$

мы можемъ представить въ формѣ: $d\varphi(x)$. Тогда самый интегралъ изобразится такъ:

$$\int_a^b d\varphi(x)$$

Это и приводитъ къ тому расширенію понятія объ интегралѣ о которомъ мы говорили.

ИНТЕГРАЛОМЪ ОТЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛА ДАННОЙ ФУНКЦІИ НАЗЫВАЕТСЯ ИНТЕГРАЛЪ ОТЪ ПРОИЗВОДНОЙ ДАННОЙ ФУНКЦІИ:

$$\int_a^b d\varphi(x) = \int_a^b \varphi'(x)\,dx$$

ИНТЕГРАЛОМЪ ОТЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО ВЫРАЖЕНІЯ $\psi(x)\,d\xi(x)$ НАЗЫВАЕТСЯ ИНТЕГРАЛЪ ОТЪ ФУНКЦІИ $\psi(x)\,\xi'(x)$

$$\int_a^b \psi(x)\,d\xi(x) = \int_a^b \psi(x)\,\xi'(x)\,dx$$

Мы видимъ, что дѣйствительно, это расширеніе не касается существа понятія объ опредѣленномъ интегралѣ, а только тѣхъ формъ въ которыхъ можетъ быть представлено подынтегральное выраженіе.

СИМВОЛЫ ПОДСТАНОВКИ

Символы подстановки играютъ въ математикѣ довольно значительную роль, благодаря тому, что они часто даютъ возможность представлять въ очень сжатой формѣ сложныя выраженія. Этихъ символовъ два: символъ простой подстановки и символъ двойной подстановки.

ЗНАЧЕНІЕ СИМВОЛА ПРОСТОЙ ПОДСТАНОВКИ ОПРЕДѢЛЯЕТСЯ РАВЕНСТВОМЪ

$$\Big/^{x=c} \varphi(x) = \varphi(c) \qquad (1)$$

Какъ мы видимъ, символомъ простой подстановки служитъ прямая, нѣсколько наклонная черта. Имъ пользуются для того, чтобы указать, что въ выраженіи передъ которымъ онъ стоитъ, надо перемѣ-

ную величину замѣнить какимъ-нибудь значенiемъ. Вверху символа пишутъ то значенiе, которымъ должна быть замѣнена перемѣнная величина. Такъ, напримѣръ, если въ выраженiи

$$\frac{2-5x+4x^3}{1+x^2}$$

надо замѣнить x черезъ 1, то пишутъ

$$\Big|^{x=1}\frac{2-5x+4x^3}{1+x^2}$$

Производя эту замѣну, получимъ

$$\Big|^{x=1}\frac{2-5x+4x^3}{1+x^2} = \frac{2-5+4}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$\Big|^{x=\frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \qquad \Big|^{x=2}\frac{3+\sin(x\pi)}{5+x\cos(\frac{\pi}{2}x)} = 1$$

Но очень часто приходится въ какомъ-нибудь выраженiи

$$\varphi(x)$$

замѣнять x сначала однимъ какимъ-нибудь значенiемъ b, потомъ другимъ значенiемъ a, и затѣмъ второй результатъ вычитать изъ перваго. Получается разность

$$\varphi(b) - \varphi(a)$$

Для указанiя на этотъ процессъ пользуются символомъ

$$\Big|_{x=a}^{x=b}$$

называемымъ символомъ двойной подстановки. Слѣдовательно,

ЗНАЧЕНIЕ СИМВОЛА ДВОЙНОЙ ПОДСТАНОВКИ ОПРЕДѢЛЯЕТСЯ РАВЕНСТВОМЪ

$$\Big|_{x=a}^{x=b}\varphi(x) = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (2)$$

ГДѢ a И b НАЗЫВАЮТСЯ ВЕРХНИМЪ И НИЖНИМЪ ПРЕДѢЛОМЪ ПОДСТАНОВКИ.

Но вмѣсто этого часто пишутъ такъ

$$\Big[\varphi(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$$

или еще короче, такъ

$$\Big[\varphi(x)\Big]_a^b$$

Напримѣръ, имѣемъ:

$$\Big|_{x=0}^{x=3}\frac{x-2x^2}{1+x^2} = \frac{3-2\cdot 9}{1+9} - \frac{0}{1} = -\frac{15}{10}.$$

$$\Big[1+2x+x^2\Big]_1^{x=2} = 5 \qquad \Big[\frac{1+x^2}{1+x}\Big]_0^1 = 0$$

Такъ какъ всегда

$$\Big|_{x=a}^{x=b}\varphi(x) = \varphi(b) - \varphi(a) = \Big|^{x=b}\varphi(x) - \Big|^{x=a}\varphi(x)$$

го можно написать символическое равенство

$$\int_{x=a}^{x=b} = \int^{x=b} - \int^{x=a}$$

Задачи. Показать, что

$$\int^{x=a} \lg(x+\sqrt{a^2-x^2}) = \ldots \qquad \int_{x=a}^{x=+a}\left\{\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}+\arcsin\frac{x}{a}\right\}=\pi$$

ИНТЕГРАЛЪ ОТЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛА ФУНКЦІИ.

По опредѣленію, интегралъ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

есть предѣлъ слѣдующей суммы:

$$f(\xi_0)(x_1-a)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+f(\xi_2)(x_3-x_2)+\ldots+f(\xi_{n-1})(b-x_{n-1})$$

Вспомнивъ это, предположимъ, что требуется вычислить слѣдующій опредѣленный интегралъ:

$$J=\int_a^b d\varphi(x)$$

гдѣ $\varphi(x)$ данная функція, по опредѣленію

$$\int_a^b d\varphi(x)=\int_a^b \varphi'(x)\,dx$$

Слѣдовательно, интегралъ J есть предѣлъ такой суммы

$$S=\varphi'(\xi_0)(x_1-a)+\varphi'(\xi_1)(x_2-x_1)+\varphi'(\xi_2)(x_3-x_2)+\ldots+\varphi'(\xi_{n-1})(b-x_{n-1})$$

причемъ каждое число ξ_k мы можемъ брать совершенно произвольно въ промежуткѣ (x_k, x_{k+1}).

Этимъ произволомъ мы воспользуемся слѣдующимъ образомъ возьмемъ числа ξ_k такъ, чтобы, согласно теоремѣ Лагранжа, имѣли мѣсто равенства

$$\varphi'(\xi_0)(x_1-a)=\varphi(x_1)-\varphi(a)$$
$$\varphi'(\xi_1)(x_2-x_1)=\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$$
$$\varphi'(\xi_2)(x_3-x_2)=\varphi(x_3)-\varphi(x_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi'(\xi_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})=\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_{n-2})$$
$$\varphi'(\xi_{n-1})(b-x_{n-1})=\varphi(b)-\varphi(x_{n-1})$$

Складывая всѣ эти равенства, найдемъ, что

$$S=\varphi(b)-\varphi(a)$$

и слѣдовательно

$$\int_a^b d\varphi(x)=\lim S=\varphi(b)-\varphi(a)$$

что даетъ теорему: ИНТЕГРАЛЪ ОТЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛА ФУНКЦІИ РАВЕНЪ РАЗНОСТИ МЕЖДУ ЗНАЧЕНІЯМИ ФУНКЦІИ ПРИ ВЕРХНЕМЪ И НИЖНЕМЪ ПРЕДѢ-

лахъ интеграла

$$\int_a^b d\,\varphi(x) \; \varphi(b) \; \varphi(a)$$

Пользуясь символомъ подстановки, эту теорему можно записать такъ

$$\int_a^b d\varphi(x) = \Big/_{x=a}^{x\ b} \varphi(x) = \left[\varphi(x)\right]_{x\ a}^{x\ b}$$

Замѣтимъ частный случай ея

$$\int_a^b dx \; b \; a$$

Доказанная теорема даетъ возможно легко вычислять опредѣленные интегралы въ томъ случаѣ, когда подынтегральное выраженіе мы сумѣемъ представить въ видѣ дифференціала функціи. Пусть напримѣръ, требуется вычислить интегралъ

$$u \int^2 x^3 dx$$

Замѣчая, что $x^3dx \; d\frac{x^4}{4}$, мы пишемъ

$$\int^2 x^3 dx \; \int^2 d\frac{x^4}{4} = \Big/_{x-}^{x=2} \frac{x^4}{4} = \frac{15}{4}$$

Задачи. Показать, что

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \; \frac{\pi}{4}$ 2) $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$ 3) $\int_0^\pi \cos x\,dx \; 0$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \; \frac{\pi}{2}$ 5) $\int_0^3 x\,dx \; \frac{9}{2}$, 6) $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin x\,dx \; 0$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОПРЕДѢЛЕННЫМЪ ИНТЕГРАЛОМЪ И НЕОПРЕДѢЛЕННЫМЪ

Понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ мы ввели, какъ понятіе о предѣлѣ нѣкоторой суммы

$$\int_a^b f(x)dx \; \lim\sum_a^b f(x)\,dx$$

Совсѣмъ инымъ путемъ мы пришли къ понятію объ неопредѣленномъ интегралѣ Къ нему мы пришли, изучая дѣйствіе, обратное дифференцированію. По опредѣленію

$$\int f(x)dx \; \varphi(x) \; C$$

если $\varphi'(x) \; f(x)$

Такимъ образомъ источники происхожденія понятій объ опредѣленныхъ и неопредѣленныхъ интегралахъ глубоко различны. И вотъ, несмотря на это, оказывается, что эти два понятія по своимъ свойствамъ находятся настолько въ тѣсной связи между собой, что если

они окончательно и не сливаются въ нѣчто одно цѣлое то все-таки настолько сближаются между собой что иногда граница между ними почти что стирается.

ТЕОРЕМА. ОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ РАВЕНЪ РАЗНОСТИ ЗНАЧЕНІЙ ФУНКЦІОНАЛЬНОЙ ЧАСТИ НЕОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА ПРИ ВЕРХНЕМЪ И НИЖНЕМЪ ПРЕДѢЛАХЪ ДАННАГО ИНТЕГРАЛА. СЛѢДОВАТЕЛЬНО, ЕСЛИ

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C \qquad (1)$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) = \Big/_{x=a}^{x=b} \varphi(x) \qquad (2)$$

Въ самомъ дѣлѣ изъ (1) слѣдуетъ, что $\varphi'(x) = f(x)$, а потому, по предыдущей теоремѣ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b d\varphi(x) = \Big/_{x=a}^{x=b} \varphi(x)$$

и теорема доказана. Эта одна изъ замѣчательнѣйшихъ и важнѣйшихъ теоремъ. Она даетъ намъ возможность вычислить опредѣленный интегралъ всякій разъ, когда мы знаемъ неопредѣленный. Такъ, напр., пусть требуется вычислить слѣдующій опредѣленный интегралъ

$$\int_1^2 x \lg x\,dx$$

Интегрированіемъ по частямъ, находимъ сначала неопредѣленный

$$\int x \lg x\,dx = \int \lg x\, d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2 \lg x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

а потому

$$\int_1^2 x \lg x\,dx = \Big/_{x=1}^{x=2} \left\{ \frac{x^2 \lg x}{2} - \frac{x^2}{4} \right\} = \lg 4 - \frac{3}{4}$$

Точно также найдемъ, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big/_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} -\cos x = +1 \qquad \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big/_{x=1}^{x=4} 2\sqrt{x} = 2$$

ИНТЕГРАЛЪ КАКЪ ФУНКЦІЯ ПРЕДѢЛОВЪ.

Пусть

$$u = \int_a^b f(x)\,dx$$

Такъ какъ величина u очевидно зависитъ отъ того, какія значенія имѣютъ a и b, то u есть функція a и b. Слѣдовательно:

<u>Опредѣленный интегралъ есть функція своихъ предѣловъ.</u>

Но, какъ мы раньше видѣли, интегралъ не есть функція перемѣн

ной интеграціи

Является вопросъ, какими свойствами обладаетъ интегралъ какъ функція своихъ предѣловъ.

ТЕОРЕМА ПРОИЗВОДНАЯ ОТЪ ИНТЕГРАЛА ПО ВЕРХНЕМУ ПРЕДѢЛУ РАВНА ЗНАЧЕНІЮ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦІИ ПРИ ВЕРХНЕМЪ ПРЕДѢЛѢ:

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b)$$

ПРОИЗВОДНАЯ ОТЪ ИНТЕГРАЛА ПО НИЖНЕМУ ПРЕДѢЛУ РАВНА ВЗЯТОМУ СЪ ОБРАТНЫМЪ ЗНАКОМЪ ЗНАЧЕНІЮ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦІИ ПРИ НИЖНЕМЪ ПРЕДѢЛѢ

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a)$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $\varphi'(x) = f(x)$ то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (1)$$

а потому

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = \varphi'(b) = f(b)$$

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -\varphi'(a) = -f(a)$$

Теорема доказана. Мы сейчасъ, введя другія обозначенія для предѣловъ, яснѣе увидимъ всю ея силу.

Замѣчаніе. Равенство (1) чрезвычайно ясно показываетъ, что интегралъ есть функція своихъ предѣловъ a и b, но не функція перемѣннаго интеграціи x, отъ котораго величина его совершенно не зависитъ.

Задачи Показать что

1) $\int_0^{\frac{4}{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{2}{27} - \frac{16\sqrt{2}}{27}$,

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\omega\, d\omega = \frac{\pi}{4}$

3) $\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = e$

4) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{\pi}{4} - \lg\sqrt{2}$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\, dx = 1 - \frac{\pi}{4}$

6) $\int_1^e \lg x\, dx = 1$

7) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

ИНТЕГРАЛЪ КАКЪ ПЕРВООБРАЗНАЯ

Одинъ и тотъ же символъ въ теченіе одного и того же разсужденія не можетъ служить для различныхъ цѣлей.

Принявъ это во вниманіе, положимъ что мы имѣемъ опредѣленный интегралъ, верхнимъ предѣломъ котораго служитъ перемѣнная величина, обозначаемая символомъ x. Тогда для обозначенія аргумента подинтегральной функціи мы уже не можемъ пользоваться тою же буквою. Поэтому, если отъ функціи $f(x)$ надо взять опредѣленный интегралъ между нижнимъ предѣломъ a и верхнимъ предѣломъ, который равенъ x, то было бы не правильно обозначить этотъ интегралъ такъ:

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

Разъ x служитъ для обозначенія верхняго предѣла, то для обозначенія аргумента функціи мы должны взять уже иную какую-нибудь букву напр. z, и написать такъ:

$$\int_a^x f(z)\,dz$$

или прибѣгая къ буквѣ y, такъ

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

и т.д.

Но вводить значительное число различныхъ символовъ представляетъ очень часто большое неудобство. Поэтому вошло въ обычай вмѣсто правильнаго обозначенія,

$$\int_a^x f(z)\,dz \qquad (1)$$

пользоваться такимъ

$$\int_a^x f(x)\,dx \qquad (2)$$

причемъ при этомъ x играетъ какъ бы двойную роль роль предѣла и роль аргумента. Необходимость различать эти двѣ его роли становится особенно ясна, если мы перемѣнному x какъ предѣлу, приписываемъ какое-нибудь числовое значеніе, напр полагаемъ $x = 3$. Тогда интегралъ (2) принимаетъ значеніе которое изобразится такъ:

$$\int_a^3 f(x)\,dx$$

т.е. мы должны замѣнить x его значеніемъ не вездѣ, а только въ верхнемъ предѣлѣ. Подставить же вмѣсто x его значеніе также и въ подинтегральномъ выраженіи т.е. написать выраженіе

$$\int_a^3 f(3)\,d3$$

это значило бы написать безсмыслицу.

Совершенно то же, что сказано относительно верхняго предѣла, относится и къ нижнему предѣлу. Точно также поступаютъ и въ томъ случаѣ, когда предѣлами интеграла служатъ нѣкоторыя функціи x. Вообще можно дать слѣдующее правило.

Если x перемѣнная величина, то вмѣсто точныхъ обозначеній

$$\int_a^x f(z)\,dz \qquad \int_x^b f(z)\,dz \qquad \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(z)\,dz$$

вошло въ обычаи пользоваться такими обозначеніями

$$\int_a^x f(x)\,dx \qquad \int_x^b f(x)\,dx\,, \qquad \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx$$

Согласно этому обычаю, мы напр., пишемъ:

$$\int_{x^2}^{+x^2} x^4\,dx \;\Big/_{x=-x^2}^{x=+x^2} \frac{x^5}{5} = \frac{2x^{10}}{5}$$

Точно также если b перемѣнная величина то вмѣсто

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

мы можемъ написать

$$\int_a^b f(b)\,db$$

а если a перемѣнная величина то такъ:

$$\int_a^b f(a)\,da$$

ВЪ СЛУЧАѢ ЖЕ ОПАСЕНІЯ ХОТЯ БЫ МАЛѢЙШАГО НЕДОРАЗУМѢНІЯ НЕОБХОДИМО УСЛОВНЫЯ ОБОЗНАЧЕНІЯ ЗАМѢНИТЬ ТОЧНЫМИ, т.е. для обозначенія перемѣнной интеграціи необходимо ввести символъ который не фигурируетъ въ выраженіяхъ его предѣловъ.

Задачи. Показать, что

$$\int_{0}^{e^{+x}} \frac{dx}{x} = 2x \qquad \int_0^{\sin x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \qquad \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x^2\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}\sqrt{x} \qquad \int_0^{2c} dc = c \qquad \int_a a\,da = \frac{a^2}{2}$$

Легко теперь доказать слѣдующую теорему:

ЕСЛИ x ПЕРЕМѢННАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕСЛИ

$$u = \int_a^x f(x)\,dx \qquad (5)$$

ТО u, КАКЪ ФУНКЦІЯ x ОБЛАДАЕТЪ СЛѢДУЮЩИМИ ДВУМЯ СВОЙСТВАМИ:

1) ДИФФЕРЕНЦІАЛЪ ЕЯ РАВЕНЪ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОМУ ВЫРАЖЕНІЮ

$$du = f(x)\,dx \qquad (4)$$

2) ОНА ОБРАЩАЕТСЯ ВЪ НУЛЬ ПРИ $x=a$

СЛѢДОВАТЕЛЬНО, ИНТЕГРАЛЪ, КАКЪ ФУНКЦІЯ ВЕРХНЯГО ПРЕДѢЛА, ЕСТЬ ТА ИЗЪ ПЕРВООБРАЗНЫХЪ *) ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦІИ, КОТОРАЯ ОБРАЩАЕТСЯ ВЪ НУЛЬ ПРИ ЗНАЧЕНІИ ПЕРЕМѢННАГО, РАВНОМЪ НИЖНЕМУ ПРЕДѢЛУ.

Для доказательства вмѣсто условнаго обозначенія (3) введемъ точное

$$u=\int_a^x f(x)\,dx \qquad (5)$$

По теоремѣ о производной по верхнему предѣлу заключаемъ, что

$$\frac{du}{dx}=f(x)$$

откуда слѣдуетъ (4)

Такъ какъ интегралъ съ равными предѣлами равенъ нулю, то изъ (5) ясно, что u обращается въ нуль при $x=a$. Слѣдовательно, доказано и второе свойство u. Какъ слѣдствіе мы выводимъ слѣдующее чрезвычайно важное заключеніе

ЕСЛИ ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦІИ u ИЗВѢСТНО, ЧТО ОНА УДОВЛЕТВОРЯЕТЪ УРАВНЕНІЮ

$$du=f(x)\,dx \qquad (6)$$

И КРОМѢ ТОГО ОБРАЩАЕТСЯ ВЪ НУЛЬ ПРИ $x=a$, ТО

$$u=\int_a^x f(x)\,dx \qquad (7)$$

Такимъ образомъ на символъ

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

мы можемъ смотрѣть какъ на символъ вполнѣ опредѣленной первообразной, а именно той первообразной, которая обращается въ нуль при $x=a$.

Но положимъ, что относительно функціи u намъ извѣстно, что она удовлетворяетъ уравненію

$$du=f(x)\,dx$$

но что намъ неизвѣстно то значеніе x, при которомъ u обращается въ нуль. Въ такомъ случаѣ мы по прежнему можемъ написать, что

$$u=\int_a^x f(x)\,dx$$

------

*) Функція $\varphi(x)$ называется первообразной функціи $\varphi(x)$, если $u'(x)=\varphi(x)$

но только здѣсь a остается для насъ неизвѣстнымъ постояннымъ, - постояннымъ, которое еще неопредѣлено и которое поэтому называется неопредѣленнымъ постояннымъ. По той же причинѣ и интегралъ,

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

нижній предѣлъ котораго остается неопредѣленнымъ стали называть неопредѣленнымъ интеграломъ. Въ этомъ случаѣ обычно не выписывали нижняго предѣла Тогда получалось выраженіе

$$\int^x f(x)\,dx$$

На это выраженіе уже приходится смотрѣть просто какъ на обозначеніе всякой функціи, производная которой равна подынтегральной функціи Если же мы кромѣ того опустимъ и верхній предѣлъ то получимъ обычное обозначеніе

$$\int f(x)\,dx$$

для неопредѣленнаго интеграла. Такъ, приблизительно исторически и появилось это обозначеніе.

Опираясь на связь опредѣленнаго интеграла съ неопредѣленнымъ, легко доказать нѣсколько теоремъ, въ которыхъ выражаются основныя свойства опредѣленнаго интеграла

Эти теоремы можно раздѣлить на двѣ группы. Въ первую мы отнесемъ теоремы, аналогичныя соотвѣтствующимъ теоремамъ въ теоріи неопредѣленныхъ интеграловъ. Вторую группу составятъ теоремы, подобныхъ которымъ нѣтъ въ теоріи неопредѣленныхъ интеграловъ

ПЕРВАЯ ГРУППА ТЕОРЕМЪ.

Мы постоянно будемъ пользоваться теоремой о связи неопредѣленнаго интеграла съ неопредѣленнымъ: если

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Замѣтимъ, что эта теорема даетъ намъ возможность представить разность между двумя значеніями какой нибудь функціи черезъ опредѣленный интегралъ Такъ, напр , если $\psi(t)$ какая-нибудь функція то

$$\psi(\beta) - \psi(\alpha) = \int_\alpha^\beta d\psi(t) \quad \int_\alpha^\beta \psi'(t)\,dt$$

Этимъ намъ придется пользоваться при доказательствѣ теоремы о подстановкѣ.

ТЕОРЕМА О ВЫНОСѢ ПОСТОЯННАГО МНОЖИТЕЛЯ. ПОСТОЯННЫЙ МНОЖИТЕЛЬ МОЖНО ВЫНОСИТЬ ИЗЪ ПОДЪ ЗНАКА ИНТЕГРАЛА, А СЛѢДОВАТЕЛЬНО И ВНОСИТЬ ПОДЪ ЗНАКЪ ИНТЕГРАЛА.

$$\int_a^b A f(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

Если $\phi'(x) - f(x)$, то имѣемъ

$$\int_a^b A f(x)dx \quad \int_a^b A d\phi(x) = \int_a^b d(A\phi(x)) - A\phi(b) - A\phi(a) - A\int_a^b f(x)dx$$

ТЕОРЕМА ОБЪ ИНТЕГРАЛѢ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ. ИНТЕГРАЛЪ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ РАВЕНЪ СУММѢ ИНТЕГРАЛОВЪ ОТЪ СЛАГАЕМЫХЪ:

$$\int_a^b \{\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \qquad \omega(x)\}dx - \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx \pm \qquad + \int_a^b \omega(x)dx$$

Пусть

$$\int \varphi(x) dx - \phi(x) + C \quad \int \psi(x)dx = F(x) + C \qquad \int \omega(x)dx \quad S(x) + C$$

Тогда

$$\int \{\varphi(x) \pm \psi(x) \pm \qquad \pm \omega(x)\}dx - \phi(x) + F(x) + \qquad - S(x) + C$$

а потому

$$\int_a^b \{\varphi(x) + \psi(x) + \qquad \pm \omega(x)\}dx \quad \{\phi(b) - \phi(a)\} \pm \{F(b) - F(a)\} \pm \qquad \pm \{S(b) - S(a)\} =$$

$$- \int_a^b \varphi(x)dx \pm \int_a^b \psi(x)dx \pm \qquad + \int_a^b \omega(x)dx$$

ТЕОРЕМА ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ ПО ЧАСТЯМЪ всегда

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = \varphi(b)\psi(b) - \varphi(a)\psi(a) \quad - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x) =$$

$$= \Big[\varphi(x)\psi(x)\Big]_a^b - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

Послѣдовательно имѣемъ

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) - \int_a^b \{d\,\varphi(x)\psi(x) \quad - \quad \psi(x)\,d\varphi(x)\} =$$

$$\int_a^b d\,\varphi(x)\psi(x) - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x) \quad \Big/_{x\ a}^{x\ b} \varphi(x)\psi(x) - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

Выраженіе $\varphi(b)\psi(b) - \varphi(a)\psi(a)$ называется проинтегрированной частью.

Примѣръ. Имѣемъ

$$\int_1^\pi \cos x \lg x\, dx - \int_1^\pi \lg x\, d\sin x \quad \left[\sin x \lg x\right]^\pi \quad \int^\pi \frac{\sin x}{x} dx - - \int_1^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

ТЕОРЕМА О ПОДСТАНОВКѢ ЕСЛИ $x - \varphi(t)$ НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦІЯ ОТЪ t, ПРИЧЕМЪ $x = a$ ПРИ $t = \alpha$ И $x = b$ ПРИ t β Т.Е.ЕСЛИ $a = \varphi(\alpha)$, $b - \varphi(\beta)$, ТО

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt - \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]d\varphi(t)$$

Пусть $\Phi'(x) - f(x)$ Имѣемъ

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b d\Phi(x) = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi[\varphi(\beta)] \quad \Phi[\varphi(\alpha)] =$$

$$-\int_\alpha^\beta d\Phi[\varphi(t)] - \int_\alpha^\beta \Phi'[\varphi(t)]\ \varphi'(t)dt - \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Слѣдовательно

$$\int_a^b f(x)dx - \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Мы видимъ, что производя въ опредѣленномъ интегралѣ замѣну перемѣннаго, мы должны не только замѣнить старое перемѣнное функціей новаго, но также должны измѣнить предѣлы интеграла. Новымъ интерваломъ интеграціи будетъ тотъ интервалъ, въ которомъ должно измѣняться новое перемѣнное t, чтобы старое перемѣнное x могло пробѣжать весь свой интервалъ.

Пусть, напр., требуется вычислить интегралъ

$$S - \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Дѣлаемъ подстановку $x - a\sin t$. Легко видѣть, что чтобы x измѣнилось отъ 0 до a надо, чтобы t измѣнилось отъ нуля до $\frac{\pi}{2}$, а потому

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2 t\, dt \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \frac{1 + \cos 2t}{2} dt - \frac{\pi a}{4}$$

Для теоретическихъ примѣненій теоремы о подстановкѣ необходимо замѣтить слѣдующую форму, въ которой она можетъ быть представлена

Пусть по прежнему

$$x = \varphi(t) \qquad a = \varphi(\alpha) \qquad b = \varphi(\beta)$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \tag{1}$$

Если теперь положимъ что

$$y = f(x),$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

Но если x разсматриваемъ, какъ функцію t то и y становится функціей t, а именно

$$y = f[\varphi(t)]$$

Теперь ясно что равенство (1) можно представить въ такомъ видѣ

$$\int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y\,dx$$

причемъ въ лѣвой части y функція x а въ правой части x и y функціи t. Слѣдовательно:

ЕСЛИ ВЪ ИНТЕГРАЛѢ

$$\int_a^b y\,dx$$

y ЕСТЬ ФУНКЦІЯ x ТО ВЕЛИЧИНА ИНТЕГРАЛА НЕ ИЗМѢНИТСЯ, ЕСЛИ МЫ БУДЕМЪ РАЗСМАТРИВАТЬ x И y КАКЪ ФУНКЦІИ НОВАГО ПЕРЕМѢННАГО t, НО ТОЛЬКО ПРИ УСЛОВІИ, ЧТОБЫ ПРЕДѢЛЫ ИНТЕГРАЛА a И b МЕЖДУ КОТОРЫМИ МѢНЯЕТСЯ x БЫЛИ ЗАМѢНЕНЫ ПРЕДѢЛАМИ α И β, МЕЖДУ КОТОРЫМИ МѢНЯЕТСЯ НОВОЕ ПЕРЕМЕННОЕ t

$$\int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y\,dx$$

Мы воспользуемся этой формой теоремы о подстановкѣ для вывода формулы для площади

Мы видѣли что если ордината кривой дана какъ функція абсциссы

$$y = f(x)$$

то для площади u пробѣгаемой ординатой при измѣненіи x отъ a до b имѣемъ

$$u = \int_a^b f(x)\,dx$$

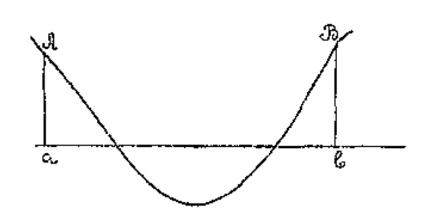
Предположимъ теперь, что кривая дана параметрически уравне-

ніями

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \qquad (1)$$

и пусть начальной и конечной точкамъ кривой соотвѣтствуютъ значенія параметра, соотвѣтственно равныя t_0 и T. Слѣдовательно, измѣняя t отъ t_0 до T, мы получимъ всю кривую AB.

Разсмотримъ какъ выразится въ этомъ случаѣ площадь u, пробѣгаемая ординатой при измѣненіи t отъ t_0 до T.



Хотя кривая намъ и дана параметрически, но ордината ея во всякомъ случаѣ есть нѣкоторая функція абсциссы, и, разсматривая y какъ функцію x, мы имѣемъ

$$u = \int_a^b y\,dx$$

гдѣ a и b абсциссы начальной и конечной точки кривой.

Но, по теоремѣ о подстановкѣ,

$$\int_a^b y\,dx = \int_{t_0}^{T} y\,dx$$

гдѣ въ правой части y и x уже функціи t. Слѣдовательно

$$u = \int_{t_0}^{T} y\,dx$$

и мы получаемъ теорему

ЕСЛИ КРИВАЯ ДАНА ПАРАМЕТРИЧЕСКИ УРАВНЕНІЯМИ

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t)$$

ТО ДЛЯ ПЛОЩАДИ, ОПИСЫВАЕМОЙ ОРДИНАТОЙ ПРИ ИЗМѢНЕНІИ ПАРАМЕТРА ОТЪ t_0 ДО T ИМѢЕМЪ

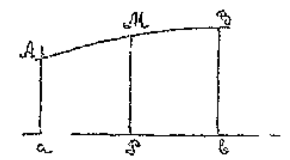
$$u = \int_{t_0}^{T} y\,dx \qquad (2)$$

ГДѢ ВЪ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОМЪ ВЫРАЖЕНІИ НАДО x И y РАЗСМАТРИВАТЬ КАКЪ ФУНКЦІИ ПАРАМЕТРА.

Чтобы изъ (2) получить обычную формулу, замѣтимъ, что если кривая дана уравненіемъ $y = f(x)$, то параметромъ служитъ x. Если онъ измѣняется отъ a до b, то согласно (2)

$$u = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

<u>Замѣчаніе</u> Если надо опредѣлить площадь u, пробѣгаемую ординатой отъ начальнаго положенія до положенія MP, гдѣ M перемѣнная точка съ параметромъ t или абсциссой x, то ясно, что въ 2) и 3) надо верхніе предѣлы интеграла взять соотвѣтственно равными t или x,

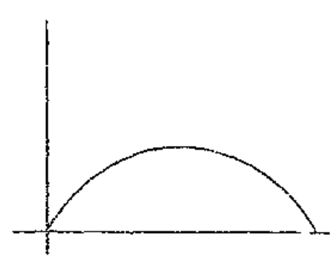


а потому въ этомъ случаѣ

$$xph\int_{x}^{b} n = xph\int_{t}^{z} = n$$

Примѣръ. Пусть требуется вычислить площадь u циклоиды, уравненія которой

$$x = a(t - \sin t) \qquad y = a(1 - \cos t)$$



Чтобы получить эту площадь, надо t измѣнять отъ 0 до 2π а потому

$$u = \int_0^{2\pi} y\,dx = a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2 \Big/_{t=0}^{t=2\pi} \left(\frac{3t}{2} - 2\sin t - \frac{\sin 2t}{4}\right) = 3\pi a^2$$

Слѣдовательно площадь циклоиды въ три раза больше площади образующаго круга.

ВТОРАЯ ГРУППА ТЕОРЕМЪ

Теоремамъ этой группы нѣтъ соотвѣтствующихъ въ теоріи неопредѣленныхъ интеграловъ

ТЕОРЕМА О ПЕРЕСТАНОВКѢ ПРЕДѢЛОВЪ ИНТЕГРАЛА. ЕСЛИ ПЕРЕСТАВИТЬ МЕЖДУ СОБОЙ ПРЕДѢЛЫ ИНТЕГРАЛА, ТО ИНТЕГРАЛЪ ИЗМѢНИТЪ СВОЙ ЗНАКЪ НА ОБРАТНЫЙ. СЛѢДОВАТЕЛЬНО

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (1)$$

Это прямо слѣдуетъ изъ того, что если $\varphi'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) \quad , \quad \int_b^a f(x)dx = \varphi(a) - \varphi(b)$$

и теорема доказана. Къ ней мы можемъ также притти и изъ слѣдующихъ геометрическихъ соображеній. Пусть

$$A = \int_a^b f(x)dx \qquad B = \int_b^a f(x)dx$$

Интегралъ A равенъ площади, пробѣгаемой ординатой, движущейся отъ a къ b. Интегралъ же B равенъ той же площади, но пробѣгаемой ординатой въ направленіи отъ b къ a. Но, съ измѣненіемъ движенія ординаты въ противоположное, знакъ площади пробѣгаемой ею, мѣняется на обратный. Поэтому $A = -B$

ТЕОРЕМА О ДѢЛЕНІИ ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРАЦІИ НА ДВѢ ЧАСТИ. Каков

бы ни было c,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

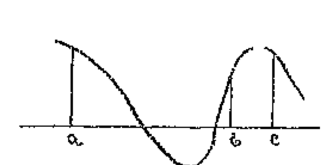
Действительно, если $f(x) = \varphi'(x)$ то

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) =$$

$$= [\varphi(c) - \varphi(a)] + [\varphi(b) - \varphi(c)] = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Теорема доказана. Если точка c лежитъ между a и b, то интервалъ (a , b) ею дѣлится на двѣ части: (a , c) и (c , b). Отсюда названiе теоремы.

Геометрически мы можемъ доказать эту теорему такъ. Пусть



$$S = \int_a^b f(x)dx \quad A = \int_a^c f(x)dx \quad B = \int_c^b f(x)dx$$

и пусть ордината движется сначала отъ a къ c потомъ отъ c къ b. Двигаясь отъ a къ c, она опишетъ площадь, равную интегралу A, двигаясь отъ c къ b, она опишетъ площадь, равную интегралу B. Слѣдовательно, въ конечномъ результатѣ она опишетъ площадь, равную $A + B$, и такъ какъ при этомъ она перемѣстится изъ a въ b то эта площадь должна равняться S. Итакъ: $S = A + B$.

ТЕОРЕМА О ДѢЛЕНIИ ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРАЦIИ НА НѢСКОЛЬКО ЧАСТЕЙ

КАКIЯ БЫ НИ БЫЛИ ЧИСЛА c_1, c_2, c_3, ... c_n, ВСЕГДА

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \qquad + \int_{c_n}^b f(x)dx$$

Это докажемъ, примѣняя послѣдовательно нѣсколько разъ предыдущую теорему. Имѣемъ

$$\int_a^b f(x)dx \quad \int_a^c + \int_c^b - \int_a + \int_c^{c_2} + \int_{c_2}^b = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \int_{c_2}^{c_3} + \int_{c_3}^b$$

Продолжая такимъ же образомъ, докажемъ теорему

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМЪ ЗНАЧЕНIИ ИНТЕГРАЛА. ИНТЕГРАЛЪ РАВЕНЪ ПРОИЗВЕДЕНIЮ ДЛИНЫ ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРАЦIИ НА ЗНАЧЕНIЕ ФУНКЦIИ ВЪ НѢКОТОРОЙ ТОЧКѢ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА. СЛѢДОВАТЕЛЬНО

$$\int_a^b f(x)dx \quad (b-a) f(\xi)$$

ГДЕ ξ НЕИЗВѢСТНОЕ ЧИСЛО ПРОМЕЖУТОЧНОЕ МЕЖДУ a И b. Если $\varphi'(x)$ $f(x)$,

то примѣняя теорему Лагранжа, заключаемъ что

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) \quad \varphi(a) - (b \quad a)\varphi'(\xi)$$

и такъ какъ $\varphi(\xi) - f(\xi)$, то имѣемъ теорему.

ТЕОРЕМА ОБЪ ИНТЕГРАЛѢ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ФУНКЦІИ. ЕСЛИ НИЖНІЙ ПРЕДѢЛЪ ИНТЕГРАЛА МЕНЬШЕ ВЕРХНЯГО И ЕСЛИ ПОДЫНТЕГРАЛЬНАЯ ФУНКЦІЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНА ПРИ ВСѢХЪ ЗНАЧЕНІЯХЪ АРГУМЕНТА, ТО ИНТЕГРАЛЪ ПОЛОЖИТЕЛЕНЪ. СЛѢДОВАТЕЛЬНО,

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

если $a \quad b$ и $f(x) > 0$ при всякомъ x.

По предыдущей теоремѣ

$$\int_a^b f(x)dx \quad (b \quad a)f(\xi)$$

Но въ правой части, по условію теоремы, оба множителя $b-a$ и $f(\xi)$ положительны, а потому и произведеніе ихъ положительно. Геометрически теорема очевидна. Въ самомъ дѣлѣ, если $f(x) > 0$, то кривая $y \quad f(x)$ лежитъ всѣми точками выше оси x. Такъ какъ $a < b$ то интегралъ равенъ площади, описываемой ординатой, движущейся въ положительномъ направленіи. Слѣдовательно площадь положительна, а потому положителенъ и интегралъ.

ТЕОРЕМА О СРАВНЕНІИ ИНТЕГРАЛОВЪ ЕСЛИ $a < b$ И $\varphi(x) < \psi(x)$ ПРИ ВСЯКОМЪ x, ТО

$$\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b \psi(x)dx$$

Въ самомъ дѣлѣ, при всякомъ x,

$$\psi(x) - \varphi(x) > 0$$

а потому, по предыдущей теоремѣ,

$$\int_a^b \{\psi(x) \quad \varphi(x)\}dx > 0$$

что можно переписать въ такомъ видѣ

$$\int_a^b \psi(x)dx \quad \int_a^b \varphi(x)dx > 0,$$

отсюда немедленно же вытекаетъ теорема.

ГЛАВА IV ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Мы ввели понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ, какъ о предѣлѣ такъ называемой интегральной суммы

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_a^b f(x)\Delta x,$$

предполагая, что подынтегральная функція непрерывна въ интервалѣ интеграціи и что предѣлами интеграла служатъ нѣкоторыя конечныя числа a и b. Такіе интегралы мы будемъ называть обыкновенными интегралами.

Но въ приложеніяхъ Анализа мы встрѣчаемся не только съ непрерывными функціями, но и съ прерывными. Кромѣ того, часто приходится разсматривать функціи, аргументы которыхъ измѣняются, не въ нѣкоторомъ конечномъ интервалѣ, но могутъ принимать всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому естественно возникаетъ вопросъ: нельзя ли расширить, или, какъ принято говорить, нельзя ли обобщить понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ такъ, чтобы не только подынтегральная функція могла быть прерывной, но чтобы и предѣлы интеграла могли принимать какъ конечныя, такъ и безконечныя значенія. Оказывается, что такое обобщеніе вполнѣ возможно, и результатомъ его получаются новые интегралы, называемые, въ отличіе отъ обыкновенныхъ, обобщенными.

Всякое значеніе аргумента данной функціи можетъ быть или точкой непрерывности, или точкой прерывности.

Точка c называется точкой непрерывности данной функціи $f(x)$, если предѣлъ функціи въ этой точкѣ конеченъ и равенъ значенію функціи въ этой точкѣ, т.е. если

$$\lim_{x=c} f(x) = f(c).$$

Всякая же точка, въ которой эти условія не соблюдаются, называется точкой прерывности.

Обычно точками прерывности являются тѣ значенія аргумента, въ которыхъ функція обращается въ безконечность. Точки прерывности надо различать отъ точекъ неопредѣленности.

Если функція дается математическимъ выраженіемъ, которое при значеніи аргумента, равномъ c, обращается въ неопредѣленное выраженіе, то это значеніе c называется точкой неопредѣленности.

Въ томъ случаѣ, когда функція имѣетъ въ точкѣ неопредѣленности предѣлъ, этотъ предѣлъ условились принимать за значеніе функціи въ точкѣ неопредѣленности.

Такъ, напр., если

$$f(x) = x \lg x,$$

то точка $x=0$ есть точка неопредѣленности. Но примѣняя пра-

вило Лопиталя, легко найдемъ, что

$$\lim_{x=0}(x \lg x) = 0$$

а потому, согласно принятому разъ навсегда условію

$$f(0) = 0$$

Въ тѣсной связи съ условіемъ о значеніяхъ функцій въ точкахъ неопредѣленности стоитъ понятіе о значеніяхъ функцій въ точкахъ $+\infty$ и $-\infty$.

ЕСЛИ ФУНКЦІЯ $\varphi(x)$ ИМѢЕТЪ ПРЕДѢЛЪ ПРИ $x = +\infty$, ТО ЭТОТЪ ПРЕДѢЛЪ УСЛОВИМСЯ ПРИНИМАТЬ ЗА ЗНАЧЕНІЕ ФУНКЦІИ ВЪ ТОЧКѢ $+\infty$. ТОЧНО ТАКЖЕ, ЕСЛИ ФУНКЦІЯ $\varphi(x)$ ИМѢЕТЪ ПРЕДѢЛЪ ПРИ $x = -\infty$, ТО ЭТОТЪ ПРЕДѢЛЪ УСЛОВИМСЯ ПРИНИМАТЬ ЗА ЗНАЧЕНІЕ ФУНКЦІИ ВЪ ТОЧКѢ $-\infty$.

СЛѢДОВАТЕЛЬНО, ПО ОПРЕДѢЛЕНІЮ

$$\varphi(+\infty) = \lim_{x = +\infty} \varphi(x)$$

$$\varphi(\ \infty) = \lim_{x\ -\infty} \varphi(x)$$

ПРИ УСЛОВІИ, ЧТО ПРЕДѢЛЫ ПРАВОЙ ЧАСТИ СУЩЕСТВУЮТЪ.

Такъ, напр., мы знаемъ, что

$$\lim_{x=+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\ \infty} e^x\ 0$$

Поэтому пишемъ

$$e^{+\infty} = +\infty \qquad e^{-\infty} = 0$$

Но, если x стремится къ $+\infty$, то $\sin x$ не имѣетъ предѣла. Поэтому выраженіе $\sin(+\infty)$ есть вполнѣ неопредѣленное выраженіе.

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВАГО ТИПА

Въ дальнѣйшемъ, для большей ясности изложенія, мы будемъ предполагать, что нижній предѣлъ интеграла меньше верхняго, потому что случай, когда верхній предѣлъ меньше нижняго, немедленно же простой перестановкой предѣловъ:

$$\int_a^b = -\int_b^a$$

приводится къ первому случаю.

Обобщенными интегралами перваго типа мы будемъ называть ин-

тегралы отъ функцій, прерывныхъ только на одномъ, или на обоихъ концахъ интервала интеграціи, но непрерывныхъ внутри его. Такъ, напр., интегралъ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

есть обобщенный интегралъ перваго типа, потому что подынтегральная функція прерывна только на концахъ интервала (-1, +1), гдѣ она обращается въ безконечность. Внутри же интервала интеграціи она непрерывна.

Идея непрерывности проходитъ красною нитью черезъ весь Анализъ. Эта же идея лежитъ и въ основѣ обобщенія понятія объ опредѣленныхъ интегралахъ.

Пусть $f(x)$ данная функція, непрерывная на всемъ интервалѣ (a, b), за исключеніемъ праваго конца b. Возьмемъ произвольно, какъ угодно малую положительную величину η. Такъ какъ функція $f(x)$ прерывна только въ точкѣ b, то на всемъ интервалѣ $(a, b-\eta)$ она будетъ уже непрерывной функціей. Поэтому, не имѣя пока права говорить объ интегралѣ

$$J = \int_a^b f(x)dx,$$

мы имѣемъ право говорить объ интегралѣ

$$H = \int_a^{b-\eta} f(x)dx$$

и этотъ интегралъ, какъ интегралъ отъ непрерывной функціи въ интервалѣ интеграціи, имѣетъ нѣкоторое, вполнѣ опредѣленное значеніе, какъ бы ни была мала положительная величина η.

Пусть η безконечно умаляется. Относительно H возможны только слѣдующія предположенія: или H не имѣетъ никакого предѣла, или имѣетъ нѣкоторый предѣлъ, причемъ этотъ предѣлъ можетъ быть или конечнымъ, или безконечнымъ. Въ томъ случаѣ когда интегралъ H имѣетъ конечный предѣлъ, естественно назвать этотъ предѣлъ интеграломъ въ интервалѣ (a, b). Такова идея обобщенія понятія объ интегралѣ.

ПОНЯТІЕ ОБЪ ИНТЕГРАЛАХЪ ОТЪ ФУНКЦІЙ, НЕПРЕРЫВНЫХЪ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРАЦІИ, НО ПРЕРЫВНЫХЪ НА ОДНОМЪ ИЛИ НА ОБОИХЪ ЕГО КОНЦАХЪ ВВОДИТСЯ СЪ ПОМОЩЬЮ СЛѢДУЮЩИХЪ ОПРЕДѢЛЕНІЙ.

1) ЕСЛИ ФУНКЦІЯ ПРЕРЫВНА ТОЛЬКО ПРИ ВЕРХНЕМЪ ПРЕДѢЛѢ ИНТЕ-

ГРАЛА ТО, ПО ОПРЕДѢЛЕНІЮ,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta=0}\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$$

ПРИ УСЛОВІИ, ЧТО ПРЕДѢЛЪ ПРАВОЙ ЧАСТИ СУЩЕСТВУЕТЪ И КОНЕЧЕНЪ.

2) ЕСЛИ ФУНКЦІЯ ПРЕРЫВНА ТОЛЬКО ПРИ НИЖНЕМЪ ПРЕДѢЛѢ ИНТЕГРАЛА, ТО ПО ОПРЕДѢЛЕНІЮ,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

ПРИ УСЛОВІИ, ЧТО ПРЕДѢЛЪ ПРАВОЙ ЧАСТИ СУЩЕСТВУЕТЪ И КОНЕЧЕНЪ

3) ЕСЛИ ФУНКЦІЯ ПРЕРЫВНА НА ОБОИХЪ КОНЦАХЪ ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРАЦІИ ТО, ПО ОПРЕДѢЛЕНІЮ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \eta=0}}\int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)\,dx$$

ПРИ УСЛОВІИ, ЧТО ПРЕДѢЛЪ ПРАВОЙ ЧАСТИ СУЩЕСТВУЕТЪ И КОНЕЧЕНЪ

Идея обобщенія ясна. Въ самомъ общемъ случаѣ вмѣсто интервала (a , b) мы беремъ интервалъ ($a+\varepsilon$, $b-\eta$) на которомъ функція уже вездѣ непрерывна, и затѣмъ безконечно умаляемъ ε и η

1 Примѣръ Пусть требуется вычислить интегралъ

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Подынтегральная функція въ интервалѣ (0 1) прерывна только въ точкѣ $x=1$ гдѣ она обращается въ безконечность.

Поэтому, согласно опредѣленію, пишемъ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\eta=0}\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

гдѣ η безконечно умаляется, принимая только положительныя значенія Такъ какъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}$$

то

$$\int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{\eta} + 2$$

а потому

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$$

2 римѣръ Пусть требуется вычислить интегралъ

$$\mathcal{G} = \int_1^2 \frac{dx}{2\ \ x} \qquad (1)$$

въ которомъ подынтегральная функція прерывна только при верхнемъ предѣлѣ Мы пишемъ:

$$\int_1^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\eta\ 0} \int_1^{2\ \eta} \frac{dx}{2\ \ x}$$

Не трудно убѣдиться, что

$$\int^{2-\eta} \frac{dx}{2\ \ x} - - \lg \eta \qquad (2)$$

Если η безконечно умаляется, то правая часть въ предѣлѣ обращается въ безконечность Слѣдовательно, интегралъ (2) не имѣетъ конечнаго предѣла а потому обобщеннаго интеграла (1) не существуетъ

3 примѣръ Разсмотримъ интегралъ

$$\mathcal{G} = \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{(1-x)^2}\ dx \qquad (1)$$

гдѣ подынтегральная функція прерывна только при верхнемъ предѣлѣ Мы пишемъ:

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^2}\, dx = \lim_{\eta\ 0} \int_0^{1\ \eta} \frac{\cos \frac{\pi}{1-x}}{(1\ \ x)^2}\, dx$$

Вычисляемъ неопредѣленный интегралъ Имѣемъ

$$\int \frac{\cos \frac{\pi}{1\ x}}{(1-x)^2}\, dx - \int \cos \frac{\pi}{1\ x}\, d\frac{1}{1\ x} \quad \frac{1}{\pi}\int \cos y\, dy - \frac{1}{\pi} \sin_1 \frac{\pi}{x} + C$$

а потому

$$\int_0^{1\ \eta} \frac{\cos \frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^2}\, dx \quad \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\eta} \qquad (2)$$

Если η стремится къ нулю, то величина $\frac{\pi}{\eta}$ безконечно возрастаетъ, синусъ же ея колебаясь между - 1 и + 1, не стремится ни къ какому конечному предѣлу Слѣдовательно интегралъ (2) не имѣетъ конечнаго предѣла, а потому не существуетъ и интеграла (1)

4 примѣръ Пусть требуется вычислить интегралъ

$$\mathcal{G} - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

въ которомъ подынтегральная функція прерывна только при нижнемъ предѣлѣ Мы пишемъ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\ 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Но

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\Big|_{x=\varepsilon}^{x=1} 2\sqrt{x}=2-2\sqrt{\varepsilon}$$

а потому, переходя къ предѣлу имѣемъ

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2$$

5 примѣръ. Пусть требуется вычислить интегралъ

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Подынтегральная функція прерывна на обоихъ концахъ интервала интеграціи, поэтому пишемъ:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon,\eta\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{1+\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

и такъ какъ

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1+\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(1+\eta)-\arcsin(-1+\varepsilon)$$

то

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\arcsin 1=\pi$$

Изъ 2 и 3 примѣровъ ясно, что обобщенные интегралы не всегда существуютъ.

ВЪ ТОМЪ СЛУЧАѢ КОГДА ОБОБЩЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ

$$\int_{a}^{b}f(x)dx$$

СУЩЕСТВУЕТЪ, ТО ЕГО НАЗЫВАЮТЪ СХОДЯЩИМСЯ ВЪ ТОЧКАХЪ ПРЕРЫВНОСТИ ПОДЪИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦІИ. ОНЪ ПОЛУЧАЕТЪ НАЗВАНІЕ РАСХОДЯЩАГОСЯ ВЪ ТОМЪ СЛУЧАѢ, ЕСЛИ ЕГО НЕ СУЩЕСТВУЕТЪ.

Всѣ основныя теоремы объ опредѣленныхъ интегралахъ отъ непрерывныхъ функцій были нами доказаны, опираясь на связь между опредѣленными и неопредѣленными интегралами, согласно которой если

$$\int f(x)dx=\Phi(x)+C,$$

то

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)$$

Естественно возникаетъ вопросъ, сохраняется ли эта связь и

для обобщенныхъ интеграловъ перваго типа. Мы докажемъ, что они сохраняются.

<u>ТЕОРЕМА</u>. ЕСЛИ ОБОБЩЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ ПЕРВАГО ТИПА

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ОТЪ ФУНКЦІИ, ПРЕРЫВНОЙ ТОЛЬКО НА ОДНОМЪ ИЛИ НА ОБОИХЪ КОНЦАХЪ ИНТЕРВАЛА (a, b) СУЩЕСТВУЕТЪ, ТО НЕОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$$

ВСЕГДА МОЖЕТЪ БЫТЬ ПРЕДСТАВЛЕНЪ ТАКЪ, ЧТОБЫ ЕГО ФУНКЦІОНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ $\varphi(x)$ БЫЛА ФУНКЦІЕЙ, НЕПРЕРЫВНОЙ НА ВСЕМЪ ИНТЕРВАЛѢ (a, b) НЕ ИСКЛЮЧАЯ ЕГО КОНЦОВЪ. ПРИ ЭТОМЪ РАВЕНСТВО

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ВСЕГДА ИМѢЕТЪ МѢСТО. ОБРАТНО, ЕСЛИ ФУНКЦІОНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ НЕОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА НЕПРЕРЫВНА НА ВСЕМЪ ИНТЕРВАЛѢ, НЕ ИСКЛЮЧАЯ ЕГО КОНЦОВЪ, ТО ОБОБЩЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ СУЩЕСТВУЕТЪ.

Предположимъ, чтобы разсмотрѣть сразу общій случай, что данная функція непрерывная внутри интервала (a, b) прерывна на обоихъ его концахъ, и пусть

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$$

Какъ бы малы ни были взяты ε и η, функція $f(x)$ непрерывна на всемъ интервалѣ ($a+\varepsilon$, $b-\eta$), не исключая и его концовъ. Слѣдовательно, мы имѣемъ право написать, что

ε η
a $a+\varepsilon$ $b-\eta$ b

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)\,dx = \varphi(b-\eta) - \varphi(a+\varepsilon) \qquad (1)$$

Функція $\varphi(x)$, какъ функціональная часть неопредѣленнаго интеграла отъ функціи, непрерывной на интервалѣ ($a+\varepsilon$, $b-\eta$) необходимо тоже непрерывна на этомъ интервалѣ, и такъ какъ ε и η могутъ быть взяты какъ угодно малыми, то, слѣдовательно, функція $\varphi(x)$ непрерывна во всѣхъ <u>внутреннихъ</u> точкахъ интервала (a, b). Поэтому мы имѣемъ право считать, что значенія функціи $\varphi(x)$ опредѣлены для всѣхъ <u>внутреннихъ</u> точекъ интервала (a, b). Что же касается значенія ея на концахъ, то мы ихъ опредѣлимъ такъ: если функція $\varphi(x)$ имѣетъ конечный предѣлъ въ точкѣ b, то этотъ предѣлъ мы примемъ за значеніе функціи въ точкѣ b. Слѣдо-

вательно, мы полагаемъ, что

$$\varphi(b) = \lim_{\eta \to 0} \varphi(b - \eta)$$

Точно также мы примемъ, что

$$\varphi(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(a + \varepsilon)$$

при условіи, что предѣлъ правой части существуетъ и конеченъ.

При этихъ условіяхъ предѣлъ функціи $\varphi(x)$ на какомъ-нибудь концѣ интервала будетъ равенъ значенію функціи на этомъ концѣ, а потому функція будетъ непрерывна въ точкѣ разсматриваемаго конца. Слѣдовательно, чтобы функція $\varphi(x)$, непрерывная внутри интервала (a, b), была также непрерывна и на концахъ его необходимо и достаточно, чтобы она на концахъ интервала имѣла конечные предѣлы.

Замѣтивъ это, перейдемъ къ доказательству теоремы. Имѣемъ равенство

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)dx = \varphi(b-\eta) - \varphi(a+\varepsilon) \qquad (1)$$

Пусть въ немъ ε и η безконечно умаляются. Обѣ части необходимо одновременно или имѣютъ конечные предѣлы или ихъ не имѣютъ.

Если лѣвая часть имѣетъ конечный предѣлъ, то обобщенный интегралъ

$$\mathcal{G} = \int_a^b f(x)dx$$

существуетъ, потому что, по опредѣленію, интегралъ $\mathcal{G}$ есть не что иное, какъ предѣлъ лѣвой части въ томъ случаѣ, когда предѣлъ этотъ существуетъ и конеченъ.

Если правая часть имѣетъ конечный предѣлъ, то, какъ мы видѣли, функція $\varphi(x)$ непрерывна на всемъ интервалѣ (a, b) не исключая его концовъ.

Теперь ясно, что, если интеграл $\mathcal{G}$ существуетъ, то функція $\varphi(x)$ непрерывна на всемъ интервалѣ (a, b). Обратно, если функція $\varphi(x)$ непрерывна на всемъ интервалѣ, то интегралъ $\mathcal{G}$ существуетъ.

Часть теоремы доказана. Если теперь интегралъ $\mathcal{G}$ существуетъ и слѣдовательно, функція $\varphi(x)$ непрерывна на всемъ интервалѣ, то изъ (1), переходя къ предѣлу, получаемъ равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

и теорема окончательно доказана

ОБОБЩЕННЫ_ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО ТИПА.

Такъ мы назовемъ интегралы отъ функцій, прерывныхъ не только на концахъ интервала интеграціи, но и внутри его

ОПРЕДѢЛЕНІЕ. ЕСЛИ ФУНКЦІЯ $f(x)$ ПРЕРЫВНА НЕ ТОЛЬКО НА КОНЦАХЪ ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРАЦІИ (a, b) НО ТАКЖЕ И ВНУТРИ ЕГО ВЪ НѢКОТОРЫХЪ ТОЧКАХЪ c, c_2, c_3 .... c_n, ТО МЫ РАЗБИВАЕМЪ ОСНОВНОЙ ИНТЕРВАЛЪ (a, b) ТОЧКАМИ ПРЕРЫВНОСТИ НА ПОДЫНТЕРВАЛЫ (a, c_1), (c_1, c_2), (c_2, c_3),... ..(c_n, b), ВЪ КАЖДОМЪ ИЗЪ КОТОРЫХЪ ФУНКЦІЯ УЖЕ ПРЕРЫВНА ТОЛЬКО НА КОНЦАХЪ.

$a \quad c \quad c_2 \quad c_3 \quad \ldots \quad c_{n-1} \quad c_n \quad b$

ЕСЛИ ВСѢ ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВАГО ТИПА

$$\int_a^c f(x)dx \quad \int_c^{c_2} f(x)dx \quad \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx \qquad \int_{c_n}^{b} f(x)dx$$

СУЩЕСТВУЮТЪ, ТО СУММА ИХЪ НАЗЫВАЕТСЯ ИНТЕГРАЛОМЪ ПО ИНТЕРВАЛУ (a, b) И ОЗНАЧАЕТСЯ ТАКЪ

$$\int_a^b f(x)dx$$

СЛѢДОВАТЕЛЬНО, ПО ОПРЕДѢЛЕНІЮ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \int_{c_2}^{c_3} + \ldots + \int_{c_n}^{b}$$

ПРИ УСЛОВІИ, ЧТО ВСѢ ИНТЕГРАЛЫ ПРАВОЙ ЧАСТИ СУЩЕСТВУЮТЪ

Напр., въ интегралѣ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

функція прерывна внутри интервала въ точкѣ $x = 0$. Поэтому пишемъ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

и разсматриваемъ отдѣльно каждый интегралъ правой части Такъ какъ

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \Big/_{-1}^{0} 3\sqrt[3]{x} = +3$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \Big/_{0}^{1} 3\sqrt[3]{x} = +3$$

то,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = +6$$

ТЕОРЕМА. ЕСЛИ ОБОБЩЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ОТЪ ФУНКЦІИ, ПРЕРЫВНОЙ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА (a , b) , СУЩЕСТВУЕТЪ, ТО НЕОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$$

МОЖНО ВСЕГДА ПРЕДСТАВИТЬ ВЪ ТАКОМЪ ВИДѢ, ЧТОБЫ ЕГО ФУНКЦІОНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ БЫЛА ФУНКЦІЕЙ, НЕПРЕРЫВНОЙ НА ВСЕМЪ ИНТЕРВАЛѢ (a , b) ОБРАТНО, ЕСЛИ ФУНКЦІОНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ НЕОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА НЕПРЕРЫВНА НА ВСЕМЪ ИНТЕРВАЛѢ ИНТЕГРАЦІИ, ТО ОБОБЩЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ СУЩЕСТВУЕТЪ, ПРИЧЕМЪ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Для простоты предположимъ, что внутри интервала (a , b) только двѣ точки прерывности p и q . Доказательство, какъ увидимъ, не зависитъ отъ числа этихъ точекъ. Само же доказательство проведемъ, опираясь на возможность изображать функціи кривыми.
По опредѣленію

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx$$

Такъ какъ, по условію теоремы интегралъ лѣвой части существуетъ, то существуютъ и всѣ интегралы правой части, причемъ каждый изъ нихъ есть интегралъ перваго типа. Поэтому неопредѣленный интегралъ отъ данной функціи можно представить въ каждомъ подынтервалѣ такъ, чтобы функціональная часть его въ этомъ подынтервалѣ была непрерывной функціей. Пусть же на интервалѣ (a , p)

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$$

на интервалѣ (p , q)

$$\int f(x)\,dx = \psi(x) + C$$

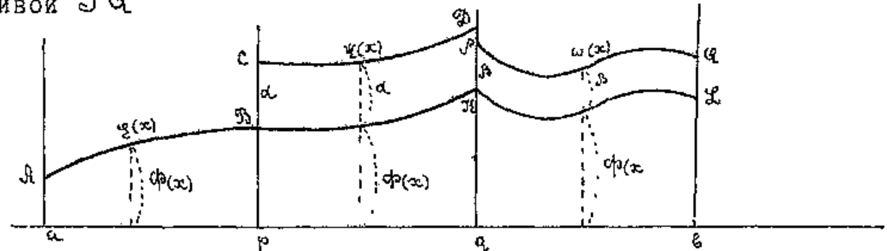
а интервалѣ (q , b)

$$\int f(x)\,dx = \omega(x) + C$$

гдѣ функціи $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\omega(x)$ непрерывны, каждая на соотвѣтствующемъ ей интервалѣ

$$\underset{a}{\vdash}\!\!\xrightarrow{\ \varphi(x)\ }\!\!\underset{p}{+}\!\!\xrightarrow{\ \psi(x)\ }\!\!\underset{q}{+}\!\!\xrightarrow{\ \omega(x)\ }\!\!\underset{b}{\dashv}$$

изображаемъ каждую изъ этихъ функцій кривой. Пусть $\varphi(x)$ изображается кривой AB, $\psi(x)$ - кривой CD, и $\omega(x)$ - кривой PQ



Мысленно кривую CD передвигаемъ внизъ, параллельно самой себѣ, пока точка C не придетъ въ B. Получимъ кривую BH. Очевидно, что каждая ордината этой кривой меньше соотвѣтствующей ординаты кривой CD на одну и ту же величину $\alpha = CB$

Пусть $\beta = PH$. Уменьшая всѣ ординаты кривой PQ на одну и ту же постоянную величину β, получимъ нѣкоторую кривую HL. Мы теперь имѣемъ непрерывную кривую $ABHL$. Пусть $\Phi(x)$ ея ордината, какъ функція абсциссы.

Функція $\Phi(x)$ непрерывна на всемъ интервалѣ (a, b). Кромѣ того

на интервалѣ (a, p) $\Phi(x) = \varphi(x)$ $\Phi'(x) = \varphi'(x) = f(x)$,

" (p, q) $\Phi(x) = \psi(x) + \alpha$ $\Phi'(x) = \psi'(x) = f(x)$,

" (q, b) $\Phi(x) = \omega(x) + \beta$, $\Phi'(x) = \omega'(x) = f(x)$

Слѣдовательно, $\Phi'(x) = f(x)$ на всемъ интервалѣ (a, b), а потому

$$\int f(x)dx = \Phi(x) + C$$

причемъ $\Phi(x)$ непрерывна на всемъ интервалѣ (a, b)

Первая половина теоремы доказана. Перейдемъ ко второй половинѣ. Пусть $f(x)$ прерывна внутри интервала (a, b) въ точкахъ c_1, c_2, c_3, ... c_n и пусть

$$\int f(x)dx = \Phi(x) + C,$$

гдѣ $\Phi(x)$ непрерывна на всемъ интервалѣ (a, b). Имѣемъ

$$\int_a^{c} f(x)dx = \Phi(c_1) - \Phi(a)$$

$$\int_c^{c_2} f(x)dx = \Phi(c_2) - \Phi(c)$$

$$\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx = \varphi(c_3) - \varphi(c_2)$$

$$\int_{c_n}^{b} f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(c_n).$$

Эти равенства мы имѣемъ право написать, потому что связь опредѣленнаго интеграла съ неопредѣленнымъ имѣетъ силу для обобщенныхъ интеграловъ перваго типа. Складывая же полученныя равенства получаемъ

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

теорема доказана Мы видимъ, что связь опредѣленнаго интеграла съ неопредѣленнымъ сохраняется и для обобщенныхъ интеграловъ второго типа.

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ТРЕТЬЯГО ТИПА

Интегралами третьяго типа мы называемъ интегралы вида

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

т е. интегралы у которыхъ одинъ или оба предѣла безконечны

<u>ОПРЕДѢЛЕНІЕ</u>. ЕСЛИ ИНТЕГРАЛЪ

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (1)$$

СУЩЕСТВУЕТЪ ПРИ ВСЯКОМЪ $b > a$ И ЕСЛИ ОНЪ ИМѢЕТЪ КОНЕЧНЫЙ ПРЕДѢЛЪ, КОГДА b БЕЗКОНЕЧНО ВОЗРАСТАЕТЪ ТО ЭТОТЪ ПРЕДѢЛЪ ОБОЗНАЧАЮТЪ ТАКЪ

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \qquad (2)$$

И НАЗЫВАЮТЪ ОБОБЩЕННЫМЪ ИНТЕГРАЛОМЪ СЛѢДОВАТЕЛЬНО ПО ОПРЕДѢЛЕНІЮ,

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (3)$$

ПРИ УСЛОВІИ, ЧТО ПРЕДѢЛЪ ПРАВОЙ ЧАСТИ СУЩЕСТВУЕТЪ И КОНЕЧЕНЪ.

Функція $f(x)$ можетъ имѣть точки прерывности. Поэтому интегралъ (1), вообще говоря, въ свою очередь есть обобщенный интегралъ Но, какъ мы видѣли, если этотъ интегралъ существуетъ то неопредѣленный интегралъ $\int f(x)dx = \varphi(x) + C$ можно всегда представить въ такомъ видѣ, чтобы функція $\varphi(x)$ была непрерывна въ интервалѣ (a, b), причемъ въ этомъ случаѣ $\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$ (4)

Пусть b безконечно возрастаетъ. Ясно, что лѣвая часть бу

детъ имѣть конечный предѣлъ, или не будетъ его имѣть смотря потому будетъ ли его имѣть или не будетъ имѣть правая часть. Если правая часть его имѣетъ то

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \varphi(+\infty) - \varphi(a)$$

т.е согласно опредѣленiю

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \varphi(+\infty) - \varphi(a) \qquad (5)$$

Мы видимъ, что связь опредѣленнаго интеграла съ неопредѣленнымъ продолжаетъ существовать и для интеграловъ типа (2).

<u>ОПРЕДѢЛЕНIЕ.</u> ЕСЛИ ИНТЕГРАЛЪ

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (6)$$

СУЩЕСТВУЕТЪ ПРИ ВСЯКОМЪ $a < b$ И ИМѢЕТЪ КОНЕЧНЫЙ ПРЕДѢЛЪ, КОГДА a БЕЗКОНЕЧНО УБЫВАЕТЪ, ТО ЭТОТЪ ПРЕДѢЛЪ ОБОЗНАЧАЮТЪ ТАКЪ·

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \qquad (7)$$

И НАЗЫВАЮТЪ ОБОБЩЕННЫМЪ ИНТЕГРАЛОМЪ. СЛѢДОВАТЕЛЬНО ПО ОПРЕДѢЛЕНIЮ,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

ПРИ УСЛОВIИ, ЧТО ПРЕДѢЛЪ ПРАВОЙ ЧАСТИ СУЩЕСТВУЕТЪ И КОНЕЧЕНЪ

Возьмемъ опять равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (8)$$

Лѣвая часть имѣетъ при $a\to-\infty$ конечный предѣлъ только тогда когда его имѣетъ правая часть причемъ въ этомъ случаѣ

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \lim_{a\to-\infty}\varphi(a)$$

т.е по опредѣленiю

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(-\infty) \qquad (9)$$

Но это равенство есть равенство (8), гдѣ a замѣнено черезъ $-\infty$. Слѣдовательно, связь опредѣленнаго интеграла съ неопредѣленнымъ остается въ силѣ и для интеграловъ типа (7) въ томъ случаѣ когда они существуютъ

<u>ОПРЕДѢЛЕНІЕ</u> Если интегралъ

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (10)$$

существуетъ при всякихъ a и b, и если этотъ интегралъ, когда a безконечно убываетъ, а b безконечно возрастаетъ, имѣетъ нѣкоторый конечный предѣлъ, то этотъ предѣлъ обозначаютъ такъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (11)$$

и называютъ обобщеннымъ интеграломъ Слѣдовательно, по опредѣленію

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{b=+\infty \\ a=-\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$$

при условіи, что предѣлъ правой части существуетъ и конеченъ

Въ равенствѣ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

пусть a безконечно убываетъ, а b возрастаетъ. Лѣвая часть будетъ имѣть конечный предѣлъ только тогда когда его имѣетъ правая часть, и въ этомъ случаѣ

$$\lim_{\substack{a=-\infty \\ b=+\infty}} \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)$$

т е

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \varphi(+\infty) - \varphi(-\infty$$

Слѣдовательно, и для интеграловъ типа (11) имѣетъ силу связь опредѣленнаго интеграла съ неопредѣленнымъ

Примѣры. Имѣемъ

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \Big/_{x=1}^{x=+\infty} \frac{-1}{x} = +1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arc\,tg}(-\infty) = \pi$$

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \Big/_0^{+\infty} \sin x \quad \sin(+\infty)$$

Но $\sin(+\infty)$ не имѣетъ никакого опредѣленнаго значенія, потому что $\sin x$, когда x безконечно возрастаетъ, не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу Слѣдовательно, обобщеннаго интеграла

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$$

не существуетъ.

ТЕОРЕМЫ ОБЪ ОБОБЩЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛАХЪ.

Всѣ основныя теоремы объ опредѣленныхъ интегралахъ отъ непрерывныхъ функцій мы доказали, опираясь на связь ихъ съ неопредѣленными интегралами. Такъ какъ эта связь сохраняетъ силу и для обобщенныхъ интеграловъ, то, очевидно, повторивъ всѣ тѣ же разсужденія, мы могли бы тѣ же теоремы доказать и для обобщенныхъ интеграловъ Слѣдовательно

ВСѢ ТЕОРЕМЫ, ДОКАЗАННЫЯ ДЛЯ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ОТЪ НЕПРЕРЫВНЫХЪ ФУНКЦІЙ, СОХРАНЯЮТЪ СВОЮ СИЛУ И ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ВЪ ТѢХЪ СЛУЧАЯХЪ, КОГДА ЭТИ ИНТЕГРАЛЫ СУЩЕСТВУЮТЪ.

Но при примѣненіи этихъ теоремъ необходимо принимать нѣкоторыя предосторожности.

Теорема о перестановкѣ предѣловъ интеграла о выносѣ постояннаго множителя за знакъ интеграла, о дѣленіи интеграла интеграціи, о суммѣ интеграловъ, - всѣ эти теоремы существуютъ безъ всякаго ограниченія

То же самое можно сказать и о теоремѣ о подстановкѣ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

Только при примѣненіи ея надо всегда обращать вниманіе, чтобы функція $\varphi(t)$ была непрерывной функціей въ интервалѣ (α,β). Это условіе необходимо даже и въ томъ случаѣ, когда функція $f(x)$ непрерывна. Что касается функціи $\varphi'(t)$, то она можетъ быть и прерывной.

Особаго вниманія заслуживаетъ теорема объ интегрированіи по частямъ. Имѣемъ:

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = \int_a^b d\,\varphi(x)\,\psi(x) - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

Но равенство

$$\int_a^b d\,\varphi(x)\,\psi(x) = \varphi(b)\,\psi(b) - \varphi(a)\,\psi(a)$$

имѣетъ мѣсто только при условіи, чтобы функціи $\varphi(x), \psi(x)$ были непрерывны въ интервалѣ (a, b) Слѣдовательно

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) - [\varphi(x)\,\psi(x)]_a^b - \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

только при условіи, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны. Ихъ производныя могутъ быть прерывны.

Наконецъ, замѣтимъ, что теорема о среднемъ значеніи интеграла, вообще говоря, невѣрна Она была нами доказана, опираясь на теорему Лагранжа, которая требуетъ, чтобы $\Phi'(x)$, т.е. $f(x)$ была вездѣ конечна Какъ разъ это не соблюдается для обобщенныхъ интеграловъ.

ВАЖНОЕ ЗАМѢЧАНІЕ.

Нами доказано, что какъ для интеграловъ отъ непрерывныхъ функціи, такъ и для обобщенныхъ интеграловъ, имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема если

$$\int f(x)dx = \Phi(x) + C$$

то

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Но надо всегда твердо помнить, что справедливость этой теоремы доказана нами только при соблюденіи слѣдующаго условія выраженіе неопредѣленнаго интеграла должно быть представлено въ такомъ видѣ, чтобы его функціональная часть, была непрерывной функціей въ интервалѣ (a, b) При несоблюденіи этого условія теорема теряетъ свою силу Поэтому на практикѣ, при вычисленіи опредѣленнаго интеграла съ помощью неопредѣленнаго, всегда надо обращать самое тщательное вниманіе на непрерывность функціональной части въ интервалѣ интегрируемости Это тѣмъ болѣе необходимо; что при фактическомъ вычисленіи неопредѣленныхъ интеграловъ очень часто, какъ показываетъ опытъ, даже для интеграловъ отъ непрерывныхъ функцій получается въ функціональной части прерывная функція Обычно это происходитъ отъ примѣненія теоремы о подстановкѣ. Мы имѣемъ

$$\int_a^b f(x)dx - \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$$

гдѣ $x = \varphi(t)$. Но это справедливо при условіи, что функція $\varphi(t)$ непрерывна И вотъ можетъ оказаться, что для функціи $\varphi(t)$ нельзя найти такого интервала $(\alpha\ \beta)$, чтобы при измѣненіи t въ этомъ интервалѣ, x измѣнялось непрерывно отъ a до b Можетъ оказаться, что, когда t измѣняется въ своемъ интервалѣ непрерывности, то x пробѣгаетъ не весь интервалъ (a, b)

а только часть его. Благодаря этому, функціональная часть можетъ оказаться прерывной.

Поясннимъ сказанное примѣромъ. Пусть требуется вычислить слѣдующій интегралъ

$$\mathcal{G} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+3\sin^2 x} \qquad (1)$$

Мы имѣемъ интегралъ отъ непрерывной, положительной функціи. Такъ какъ кромѣ того нижній предѣлъ меньше верхняго то нашъ интегралъ завѣдомо равенъ нѣкоторой положительной величинѣ. Во всякомъ случаѣ онъ не можетъ равняться нулю.

Вычисляемъ его. Для этого вычисляемъ сначала неопредѣленный. Вспоминая, что подъ $\operatorname{arc\,tg} x$ мы разумѣемъ дугу, лежащую въ первой или четвертой четверти послѣдовательно находимъ

$$\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \int \frac{dx}{(\cos^2 x+\sin^2 x)+3\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$$

$$= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+4\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2\operatorname{tg} x)}{1+(2\operatorname{tg} x)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2}$$

а потому

$$\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg} x) + C \qquad (2)$$

Слѣдовательно

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}\pi) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}0) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}0 - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}0 = 0\,!$$

Въ чемъ же дѣло? Дѣло въ томъ, что функціональная часть

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg} x)$$

получилась у насъ прерывной въ интервалѣ $(0 \quad \pi)$. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ ее въ такомъ видѣ

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z \qquad z = 2\operatorname{tg} x$$

Когда x непрерывно возрастаетъ отъ нуля до $\frac{\pi}{2}$, то z непрерывно возрастаетъ отъ нуля до $+\infty$. Поэтому въ интервалѣ $(0,\frac{\pi}{2})$ мы должны принять, что

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(+\infty) = +\frac{\pi}{4} \qquad (3)$$

и функція $\varphi(x)$ непрерывна въ интервалѣ $(0 \quad \frac{\pi}{2})$.

Будемъ измѣнять x отъ $\frac{\pi}{2}$ до π. При этомъ измѣненіи z уже отрицателенъ, и когда x, находясь во второй четверти, приближается къ $\frac{\pi}{2}$, то z стремится къ $-\infty$ а потому теперь мы должны принять, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = -\infty$. Благодаря этому

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-\infty) = -\frac{\pi}{4} \qquad (4)$$

чо функція $\varphi(x)$ непрерывна въ интервалѣ $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

Изъ (3) и (4) мы видимъ, что въ точкѣ $x=\frac{\pi}{2}$ функція $\varphi(x)$ принимаетъ различныя значенія въ зависимости отъ того, съ какой стороны приближается x къ этой точкѣ. Слѣдовательно, функція $\varphi(x)$, будучи непрерывной какъ въ интервалѣ $(0, \frac{\pi}{2})$ такъ и въ интервалѣ $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, въ то же время прерывна на всемъ интервалѣ $(0 \quad \pi)$, а потому для этого интервала мы не имѣемъ права воспользоваться теоремой о вычисленіи опредѣленнаго интеграла черезъ неопредѣленный

Какъ же быть? Очень просто Мы разбиваемъ интервалъ $(0, \pi)$ на два интервала $(0, \frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2} \quad \pi)$. Имѣемъ

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+3\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x}$$

$$\int\frac{dx}{1+3\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x) + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \Big/_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(+\infty) = +\frac{\pi}{4},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \Big/_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi}\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}x) - -\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-\infty) = +\frac{\pi}{4}$$

а потому окончательно

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \frac{\pi}{2} > 0$$

СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛА ОТЪ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ФУНКЦІИ

Какъ узнать существуетъ или нѣтъ обобщенный интегралъ въ томъ случаѣ, когда мы не можемъ вычислить неопредѣленнаго интеграла?

Этотъ вопросъ оказывается чрезвычайно труднымъ Мы ограничимся здѣсь разсмотрѣніемъ наиболѣе простого случая *) когда данная функція $f(x)$ положительна между предѣлами интеграціи. Докажемъ слѣдующую лемму:

ЕСЛИ ПОДЫНТЕГРАЛЬНАЯ ФУНКЦІЯ ИНТЕГРАЛА

$$\int_a^b f(x)dx$$

НЕПРЕРЫВНА И ПОЛОЖИТЕЛЬНА ПРИЧЕМЪ $a < b$ ТО, ЕСЛИ ИНТЕРВАЛЪ

*) *Подробнѣй см. 2 часть*

ИНТЕГРАЦІИ РАСШИРЯЕТСЯ, Т.Е. ЕСЛИ b УВЕЛИЧИВАЕТСЯ, a УМЕНЬШАЕТСЯ ТО ВЕЛИЧИНА ИНТЕГРАЛА УВЕЛИЧИВАЕТСЯ.

Геометрически это очевидно, потому что интегралъ представляетъ площадь, расположенную выше оси x, и ясно, что эта площадь будетъ увеличиваться если точка b будетъ двигаться вправо а точка a влѣво. Но то же не трудно доказать аналитически.

Пусть функція $f(x)$ положительна, и пусть

$$a_1 < a < b < b_1$$

Имѣемъ

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = \int_{a_1}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{b_1} f(x)dx$$

Въ правой части всѣ интегралы положительны, а потому

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx > \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

и лемма доказана. Опираясь на нее, мы докажемъ слѣдующую теорему

ЕСЛИ ВЪ ИНТЕРВАЛѢ ИНТЕГРАЦІИ ФУНКЦІИ $\varphi(x)$ И $\psi(x)$ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ ПРИЧЕМЪ ПРИ ВСЯКОМЪ x

$$\varphi(x) < \psi(x)$$

И ЕСЛИ НИЖНІЙ ПРЕДѢЛЪ ИНТЕГРАЛА МЕНЬШЕ ВЕРХНЯГО ТО ИНТЕГРАЛЪ

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)dx \qquad (1)$$

ЗАВѢДОМО СУЩЕСТВУЕТЪ, ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТЪ ИНТЕГРАЛЪ

$$\int_{a}^{b} \psi(x)dx, \qquad (2)$$

ПРИ ЭТОМЪ ВСЕГДА

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)dx < \int_{a}^{b} \psi(x)dx \qquad (3)$$

ПРЕДѢЛЫ ИНТЕГРАЛА a И b МОГУТЪ БЫТЬ КАКЪ КОНЕЧНЫМИ, ТАКЪ И БЕЗКОНЕЧНЫМИ

Предположимъ сначала что a и b конечны и что данныя функціи прерывны только на концахъ интервала. Слѣдовательно, интегралы (1) и (2) перваго типа. Такъ какъ $\varphi(x) < \psi(x)$ и $a < b$ то

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} \varphi(x)dx < \int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} \psi(x)dx \qquad (4)$$

Когда ε и η безконечно умаляются, то интервалъ интеграціи расширяется, а потому обѣ части этого неравенства возрастаютъ. Слѣдовательно, если мы докажемъ, что лѣвая часть не можетъ безконечно возрастать, то тѣмъ самымъ мы докажемъ, что она имѣетъ конечный предѣлъ т.е докажемъ, что интегралъ (1) существуетъ. Но

доказать это не трудно. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ, по предположенію, интегралъ (2) существуетъ, то правая часть (4) имѣетъ конечный предѣлъ. Но лѣвая часть меньше правой части а потому она не можетъ безконечно возрастать и слѣдовательно имѣетъ конечный предѣлъ, т.е. интегралъ (2) существуетъ.

Переходя къ предѣлу, изъ (4) получаемъ (3). Теорема доказана для интеграловъ перваго типа

Пусть теперь функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ прерывны внутри интервала въ точкахъ c, c_2, c_3 . c_n. По опредѣленію

$$\int_a^b \psi(x)dx = \int_a^{c_1} \psi(x)dx + \int_c^{c_2} \psi(x)dx + \qquad + \int_{c_n}^b \psi(x)dx$$

и интегралъ въ лѣвой части существуетъ только тогда, когда существуютъ слѣдующіе интегралы перваго типа

$$\int_a^{c} \psi(x)dx \quad \int_{c}^{c_2} \psi(x)dx \qquad \int_{c_n}^b \psi(x)dx \tag{5}$$

Но интегралъ (2) существуетъ, а потому существуютъ и всѣ интегралы (5) Слѣдовательно по доказанному существуютъ и интегралы:

$$\int_c^{c} \varphi(x)dx \quad \int_c^{c_2} \varphi(x)dx \qquad \int_{c_n}^b \varphi(x)dx\,, \tag{6}$$

а потому существуетъ и ихъ сумма, т.е интегралъ (1)

Кромѣ того

$$\int_a^{c} \varphi(x)dx < \int_a \psi(x)dx\,,$$

$$\int_{c_1}^{c_2} \varphi(x)dx < \int_{c_1}^{c_2} \psi(x)dx$$

$$\dots$$

$$\int_{c_n}^b \varphi(x)dx < \int_{c_n}^b \psi(x)dx$$

Складывая эти неравенства мы получаемъ неравенство (3)

Теперь теорема доказана и для интеграловъ второго типа. Остается доказать ее для интеграловъ съ безконечными предѣлами. Если a и b конечны, то, по доказанному

$$\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b \psi(x)dx \tag{7}$$

Пусть b стремится къ $+\infty$. Если интегралъ

$$\int_a^{\infty} \psi(x)dx \tag{8}$$

существуетъ, то правая часть неравенства, а слѣдовательно и лѣвая имѣетъ конечный предѣлъ. Это значитъ, что интегралъ

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

существуетъ, причемъ (7) въ предѣлѣ даетъ

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx < \int_0^{+\infty} \psi(x)dx \qquad (9)$$

Теорема доказана для случая, когда въ (3) a конечно, $b=+\infty$. Снова беремъ неравенство (7). Заставляя въ немъ a убывать до ∞, заключаемъ, что если интегралъ

$$\int_{-\infty}^{b} \psi(x)dx$$

существуетъ то и интегралъ

$$\int_{-\infty}^{b} \varphi(x)dx$$

тоже существуетъ причемъ

$$\int_{\infty}^{b} \varphi(x)dx < \int_{-\infty}^{b} \psi(x)dx$$

и теорема доказана, когда въ (3) b конечно, $a=-\infty$.

Снова беремъ неравенство (7), и пусть въ немъ a стремится къ $-\infty$ b къ $+\infty$. Заключаемъ, что если интегралъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx$$

существуетъ, то и интегралъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$$

то же существуетъ причемъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx < \int_{\infty}^{+\infty} \psi(x)dx$$

Теорема доказана и для случая, когда въ (3) a $-\infty$, $b=+\infty$. Слѣдовательно, теорема окончательно доказана.

Примѣнимъ ее къ доказательству существованія интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx, \qquad (1)$$

называемаго интеграломъ Пуассона и играющаго, между прочимъ, большую роль въ теоріи вѣроятности. Чтобы доказать его существованіе мы должны изслѣдовать, будетъ ли интегралъ

$$\int_0^{b} e^{x^2}dx$$

стремиться къ конечному предѣлу, если мы заставимъ b безконечно возрастать. Но такъ какъ

$$\int_0^{b} e^{-x^2}dx = \int_0^{1} e^{-x^2}dx + \int_1^{b} e^{x^2}dx \qquad (2)$$

то что, что лѣвая часть будетъ имѣть конечный предѣлъ, если таковой же предѣлъ будетъ имѣть второй интегралъ въ правой части, т.е., иными словами, интегралъ Пуассона будетъ существовать, если существуетъ интегралъ

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx \qquad (3)$$

Изслѣдуемъ же его. Въ подинтегральномъ выражен. $x>1$, но если $x>1$, то $x^2>x$, а потому

$$e^{-x^2}<e^{-x}$$

Слѣдовательно интегралъ (3) существуетъ если существуетъ интегралъ

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx \qquad (4)$$

Но

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \Big|_{x=1}^{x=+\infty} -e^{-x} = -e^{-\infty}+e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Интегралъ (4) существуетъ. Слѣдовательно, и интегралъ Пуассона существуетъ.

ЗАКЛЮЧЕНIЕ.

Понятiе объ обобщенныхъ интегралахъ вводимъ съ помощью опредѣленiя:

Если $f(x)$ прерывна только въ точкѣ b, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx$$

Если $f(x)$ прерывна только въ точкѣ a, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Если $f(x)$ прерывна только на обоихъ концахъ интервала, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon,\eta\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)dx$$

Если $f(x)$ прерывна внутри интервала, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c} + \int_{c}^{c_2} + \int_{c_2}^{c_3} + \qquad + \int_{c_n}^{b}$$

если одинъ или оба предѣла интеграла безконечны, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{c} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^{b} f(x)dx$$

Всѣ основныя теоремы остаются въ силѣ и для обобщенныхъ интеграловъ въ томъ случаѣ, когда они существуютъ.

Для примѣненія теоремы о связи между опредѣленнымъ и не опредѣленнымъ интеграломъ, необходимо, чтобы функціональная часть неопредѣленнаго интеграла была непрерывною функціей.

ГЛАВА V. ИНТЕГРАЛЪ КАКЪ ФУНКЦІЯ ПАРАМЕТРА. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть $f(x, y, z, \ldots u)$-непрерывная функція нѣсколькихъ аргументовъ. Если всѣ ея аргументы, кромѣ x, мы будемъ разсматривать, какъ постоянныя, то наша функція обратится въ функцію одного перемѣннаго. Какъ отъ всякой функціи одного перемѣннаго, мы можемъ взять отъ нея опредѣленный интегралъ. Пусть

$$S = \int_a^b f(x, y, z, \ldots u)\,dx \qquad (1)$$

КОГДА ОТЪ ФУНКЦІИ НѢСКОЛЬКИХЪ АРГУМЕНТОВЪ БЕРЕТСЯ ОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ, РАЗСМАТРИВАЯ ВСѢ АРГУМЕНТЫ, КРОМѢ ОДНОГО, КАКЪ ПОСТОЯННЫЯ ВЕЛИЧИНЫ, ТО ВСѢ ТѢ АРГУМЕНТЫ, КОТОРЫЕ РАЗСМАТРИВАЮТСЯ, КАКЪ ПОСТОЯННЫЕ, ПОЛУЧАЮТЪ НАЗВАНІЕ ПАРАМЕТРОВЪ, ТОТЪ ЖЕ АРГУМЕНТЪ, КОТОРЫЙ РАЗСМАТРИВАЕТСЯ КАКЪ ПЕРЕМѢННАЯ ВЕЛИЧИНА, НАЗЫВАЕТСЯ ПЕРЕМѢННЫМЪ ИНТЕГРАЦІИ. ГОВОРЯТЪ, ЧТО ОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ БЕРЕТСЯ ПО НЕМУ.

Слѣдовательно, интегралъ (1) взятъ по x, аргументы y, z, ... u служатъ параметрами.

Очевидно, что отъ функціи нѣсколькихъ аргументовъ мы можемъ взять интегралъ по каждому аргументу. Поэтому рядомъ съ интеграломъ (1) мы имѣемъ такіе интегралы:

$$\int_\alpha^\beta f(x, y, z, \ldots u)\,dy, \quad \int_\gamma^\delta f(x, y, z, \ldots u)\,dz$$

и т.д.

Надо обратить вниманіе на то, что когда мы пишемъ

$$S = \int_a^b f(x, y, z, \ldots u)\,dx$$

то на параметры y, z, ... u мы должны смотрѣть какъ на постоянные только до тѣхъ поръ, пока мы вычисляемъ интегралъ. Очевидно, что величина S вполнѣ зависитъ отъ того, какія значенія мы выберемъ какъ для a и b, такъ и для параметровъ y, z, ... u, а потому имѣемъ чрезвычайно важное заключеніе

ОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ ЕСТЬ ФУНКЦІЯ КАКЪ СВОИХЪ ПРЕДѢЛОВЪ, ТАКЪ И ПАРАМЕТРОВЪ.

Задачи. Найти, какими функціями своихъ параметровъ являются интегралы

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\,dx \qquad 2)\ \int_0^1 e^{-x^2 y}\,dy \qquad 3)\ \int_1^{1+y+y^2} \frac{dx}{x+y},$$

отв. $1)\ \cos y - \sin y \qquad 2)\ \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}, \qquad 3)\ \lg(1+y)$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЕ ИНТЕГРАЛА ПО ПАРАМЕТРУ.

Пусть $f(x, y)$ непрерывная функція двухъ перемѣнныхъ. Возьмемъ отъ нея, разсматривая y какъ параметръ, интегралъ по x между постоянными предѣлами a и b. Этотъ интегралъ будетъ функціей параметра y. Обозначая эту функцію через $\psi(y)$, имѣемъ

$$\psi(y) = \int_a^b f(x\ y)\,dx \qquad (1)$$

Вычислимъ производную отъ $\psi(y)$. Такъ какъ

$$\psi(y+h) = \int_a^b f(x\ y+h)\,dx$$

то

$$\frac{\psi(y+h)-\psi(y)}{h} = \int_a^b \frac{f(x\ y+h)\ \ f(x,y)}{h}\,dx$$

принимая же во вниманіе, что, по теоремѣ Лагранжа,

$$f(x\ y+h) - f(x\ y) = h f'_y(x\ y+\theta h),$$

получаемъ

$$\frac{\psi(y+h)-\psi(y)}{h} = \int_a^b f'_y(x, y+\theta h)\,dx.$$

Пусть h безконечно уменьшается. Въ предѣлѣ, при h 0, имѣемъ:

$$\psi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\,dx$$

Принимая во вниманіе (1), получаемъ теорему:

ЧТОБЫ ПОЛУЧИТЬ ПРОИЗВОДНУЮ ОТЪ ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА ПО ПАРАМЕТРУ, ДОСТАТОЧНО ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАТЬ ПО ПАРАМЕТРУ ПОДЫНТЕГРАЛЬНУЮ ФУНКЦІЮ. СЛѢДОВАТЕЛЬНО,

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x\ y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx$$

Но эта теорема доказана въ предположеніи, что предѣлы интеграла a и b не зависятъ отъ параметра y. Посмотримъ, какъ выра

зится производная отъ интеграла въ томъ случаѣ, когда a и b функціи y. Пусть вообще

$$u=\int_a^b f(x\ y)\,dx$$

Такъ какъ мы можемъ давать величинамъ a b и y какія угодно значенія, то u есть функція трехъ переменныхъ a, b и y. По только что доказанному

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$$

Чтобы найти частныя производныя отъ u по a и b, пользуемся теоремой о производной интеграла по предѣламъ. Имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial a}=-f(a\ y)\qquad \frac{\partial u}{\partial b}=f(b,y)$$

Если же мы предположимъ, что a и b въ свою очередь функціи y, то тогда, по теоремѣ о производной отъ функціи функцій, имѣемъ,

$$\frac{du}{dy}=\frac{\partial u}{\partial a}\frac{da}{dy}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{db}{dy}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

а потому заключаемъ, что:
Если a и b функціи y, то

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x\ y)\,dx=-f(a,y)\frac{da}{dy}+f(b\ y)\frac{db}{dy}+\int_a^b\frac{\partial f(x\ y)}{\partial y}\,dx$$

При примѣненіи этой теоремы на практикѣ если предѣлы интеграла функціи параметровъ, всегда надо сначала обозначить предѣлы интеграла особыми буквами. Пусть, напр., требуется найти производную по t отъ слѣдующаго интеграла

$$u=\int_{\sin t}^{e^t} e^{tx^2}\,dx$$

Мы сначала пишемъ

$$u=\int_a^b e^{tx^2}\,dx,$$

гдѣ a и b разсматриваемъ какъ функціи t

$$a=\sin t\ ,\ b=e^t$$

Имѣемъ:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{db}{dt}+\frac{\partial u}{\partial t}=$$

$$=-e^{ta^2}\cos t+e^{tb^2}e^t+\int_a^b x^2e^{tx^2}\,dx$$

и окончательно

$$\frac{du}{dt}=-e^{t\sin^2 t}\cos t+e^{t(e^{2t}+1)}+\int_{\sin t}^{e^t} x^2e^{tx^2}\,dx$$

Разсмотримъ еще примѣръ. Пусть

$$g = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-z)^n f(z)\,dz$$

Параметромъ служитъ x. Пишемъ

$$g = \frac{1}{n!}\int_0^a (x-z)^n f(z)\,dz$$

Разсматривая g какъ функцію a и x, имѣемъ

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{1}{n!}(x-a)^n f(a) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^a (x-z)^{n-1} f(z)\,dz$$

Принимая теперь $x = a$, находимъ:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial a}\frac{da}{dx} + \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

потому что $\frac{\partial g}{\partial a} = 0$ при $a = x$. Слѣдовательно

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{n!}\int_0^x (x-z)^n f(z)\,dz = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz$$

ИНТЕГРИРОВАНІЕ ПО ПАРАМЕТРУ

Если, имѣя непрерывную функцію $f(x, y)$, мы возьмемъ отъ нея интегралъ по x:

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

то этотъ интегралъ есть функція y, которую мы можемъ проинтегрировать по y, напр. между предѣлами α и β. Получимъ выраженіе:

$$\int_\alpha^\beta \left\{\int_a^b f(x,y)\,dx\right\} dy$$

Здѣсь мы сначала интегрируемъ по x, потомъ по y. Спрашивается, что мы получимъ, если ту же функцію $f(x, y)$ между тѣми же предѣлами проинтегрируемъ сначала по y, потомъ по x. Отвѣтъ на это даетъ такъ называемая теорема объ интегрированіи по параметру.

ЧТОБЫ ПРОИНТЕГРИРОВАТЬ ПО ПАРАМЕТРУ ИНТЕГРАЛЪ МЕЖДУ ПРЕДѢЛАМИ, НЕЗАВИСЯЩИМИ ОТЪ ПАРАМЕТРА, ДОСТАТОЧНО ПРОИНТЕГРИРОВАТЬ ПО ПАРАМЕТРУ ПОДЫНТЕГРАЛЬНУЮ ФУНКЦІЮ. СЛѢДОВАТЕЛЬНО, РЕЗУЛЬТАТЪ ДВУКРАТНАГО ИНТЕГРИРОВАНІЯ ФУНКЦІИ ДВУХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ МЕЖДУ ПОСТОЯННЫМИ ПРЕДѢЛАМИ НЕ ЗАВИСИТЪ ОТЪ ПОРЯДКА ИНТЕГРИРОВАНІЯ.

Требуется доказать, что, если a, b, α, β не зависятъ отъ x и y, то

$$\int_\alpha^\beta \left\{\int_a^b f(x,y)\,dx\right\} dy = \int_a^b \left\{\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy\right\} dx$$

Пусть $u=\int_\alpha^\beta\{\int_a^b f(x\ y)\,dx\}\,dy$, $v\ \int_a^b\{\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy\}\,dx$

Будемъ считать, что α, β и a имѣютъ какія-нибудь постоянныя значенія; что же касается до b , то его будемъ разсматривать, какъ перемѣнное. Тогда u и v будутъ функціями b Вычислимъ ихъ производныя

Начнемъ съ u. Эта величина представляется въ видѣ опредѣленнаго интеграла по y отъ слѣдующаго выраженія

$$\int_a^b f(x,y)\,dx,$$

которое является функціей отъ b и y обозначая его на время черезъ $\omega(b, y)$, мы имѣемъ

$$u=\int_\alpha^\beta \omega(b\ y)\,dy$$

Теперь мы ясно видимъ, что, чтобы найти производную отъ u по b, надо продифференцировать опредѣленный интегралъ по параметру, роль котораго играетъ b. Имѣемъ

$$\frac{du}{db}=\int_\alpha^\beta\{\frac{d}{db}\int_a^b f(x\ y)\,dx\}\,dy$$

и, примѣняя къ интегралу въ скобкахъ теорему о производной по верхнему предѣлу, заключаемъ, что

$$\frac{du}{db}=\int_\alpha^\beta f(b\ y)\,dy$$

Найдемъ теперь производную отъ v. для этого достаточно примѣнить теорему о производной интеграла по верхнему предѣлу Имѣемъ:

$$\frac{dv}{db}=\int_\alpha^\beta f(b,y)\,dy$$

Мы видимъ, что производныя отъ u и v равны Поэтому

$$u=v+C,$$

т е.

$$\int_\alpha^\beta\{\int_a^b f(x\ y)\,dx\}\,dy=\int_a^b\{\int_\alpha^\beta f(x\ y)\,dy\}\,dx+C$$

гдѣ C постоянная величина, не мѣняющаяся съ измѣненіемъ b. Но полагая b равнымъ a, мы находимъ, что $C=0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІИ И ИНТЕГРИРОВАНІИ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

Мы доказали, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x\,y)\,dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx, \qquad (1)$$

$$\int_\alpha^\beta\left\{\int_a^b f(x,y)\,dx\right\}dy=\int_a^b\left\{\int_\alpha^\beta f(x\,y)\,dy\right\}dx, \qquad (2)$$

предполагая, что a и b имѣютъ конечныя величины и что подынтегральная функція непрерывна. Спрашивается будутъ ли равенства (1) и (2) справедливы и для обобщенныхъ интеграловъ, когда или подынтегральная функція прерывна или предѣлы интеграловъ безконечны.

Это оказывается чрезвычайно трудной задачей, поэтому на рѣшеніи ея мы здѣсь останавливаться не будемъ. Замѣтимъ только, что болѣе глубокія изслѣдованія приводятъ къ заключенію что какъ общее правило: <u>если соотвѣтствующіе обобщенные интегралы существуютъ, то теорема о дифференцированіи и интегрированіи по параметру остаются для нихъ въ силѣ.</u>

ВЫЧИСЛЕНІЕ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

Какими методами мы обладаемъ для вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ? Мы знаемъ, что, если

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x)+C$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(a)$$

Благодаря этому соотношенію между неопредѣленными и опредѣленными интегралами, мы можемъ считать задачу о вычисленіи даннаго опредѣленнаго интеграла рѣшенной всякій разъ, когда мы умѣемъ вычислить соотвѣтствующій неопредѣленный интегралъ. Но такъ какъ только въ рѣдкихъ случаяхъ мы въ состояніи вычислить неопредѣленный интегралъ, то установленная связь между опредѣленнымъ интеграломъ и неопредѣленнымъ не рѣшаетъ вполнѣ вопроса о вычисленіи опредѣленнаго интеграла. Невозможность вычислить для всякой функціи неопредѣленный интегралъ заставляетъ искать другихъ методовъ для вычисленія опредѣленныхъ. Надо замѣтить, что изъ того факта, что разъ мы знаемъ неопредѣленный интегралъ, то тѣмъ самымъ мы имѣемъ возможность вычислить опредѣленный, было бы ошибочно заключить, что если мы не можемъ вычислить неопредѣленнаго интеграла, то въ такомъ случаѣ мы не въ состояніи найти и величину опредѣленнаго интеграла - это было бы ошибочнымъ потому, что, какъ увидимъ не рѣдко можно найти значеніе опредѣлен-

наго интеграла и въ тѣхъ случаяхъ, когда мы не знаемъ соотвѣтствующаго неопредѣленнаго интеграла. Вообще при вопросѣ о вычисленіи опредѣленнаго интеграла надо рѣзко различать два случая. Одинъ случай мы имѣемъ тогда, когда предѣлы интеграла разсматриваются какъ перемѣнныя величины, т.е. когда въ выраженіи

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

a и b не имѣютъ нѣкоторыхъ, вполнѣ опредѣленныхъ числовыхъ значеній но могутъ принимать различныя значенія. Совершенно другой случай мы имѣемъ, когда оба предѣла имѣютъ вполнѣ опредѣленныя числовыя значенія, т.е. когда мы имѣемъ выраженія типа:

$$\int_1^2 f(x)\,dx\,,\quad \int_5^7 f(x)\,dx\,,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

и т.д. Разсмотримъ отдѣльно оба эти случая

Пусть нижній предѣлъ a имѣетъ опредѣленное числовое значеніе напр., $a = 2$; верхній же предѣлъ будемъ разсматривать какъ перемѣнную величину и обозначимъ его черезъ x. Если

$$\varphi(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

то

$$d\,\varphi(x) = f(x)\,dx$$

и слѣдовательно

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$$

Теперь ясно, что, если верхній предѣлъ опредѣленнаго интеграла перемѣнная величина, то вычислить опредѣленный интегралъ - это то же, что вычислить неопредѣленный интегралъ. Иными словами это значитъ, что, если въ данномъ случаѣ мы не можемъ вычислить неопредѣленнаго интеграла, то тѣмъ самымъ мы лишены возможности вычислить и опредѣленный интегралъ. Но въ совершенно иномъ положеніи находимся мы, когда требуется вычислить опредѣленный интегралъ, предѣлами котораго служатъ нѣкоторыя вполнѣ опредѣленныя числа. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,, \tag{1}$$

гдѣ a и b имѣютъ данныя, вполнѣ опредѣленныя числовыя значенія Если мы предположимъ что

$$\int f(x)\,dx = \omega(x) + C \tag{2}$$

то тогда

$$\mathcal{G} \ \ \omega(b) - \omega(a) \qquad (3)$$

по разъ a и b нѣкоторыя числа, то $\omega(a)$, и $\omega(b)$ опредѣленныя значенія функціи $\omega(x)$, т.е. тоже числа, и равенство (3) ясно показываетъ слѣдующее <u>чтобы знать значеніе интеграла $\mathcal{G}$, намъ не надо знать самой функціи $\omega(x)$, но достаточно знать два ея значенія при $x = a$ и при $x - b$</u>. Очевидно, возможно ожидать, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы, не зная самой функціи будемъ въ то же время въ состояніи вычислить два ея значенія. Тогда, не зная неопредѣленнаго интеграла, мы будемъ знать опредѣленный.

Насколько одно дѣло - знать функцію, и совсѣмъ другое дѣло знать два ея значенія, это особенно ясно геометрически. Построимъ кривую

$$y - \omega(x$$

для интервала (о , b). Значеніе ея $\omega(a)$ и $\omega(b)$ изобразятся ординатами точекъ $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$

Чтобы знать эти значенія, мы должны знать только положеніе двухъ точекъ $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Для этого намъ совершенно не надо знать, какъ течетъ между ними кривая. Но чтобы знать функціи $\omega(x)$, намъ надо знать теченіе всей кривой

Очевидно, одно дѣло знать форму всей кривой, и совершенно другое знать положеніе только двухъ точекъ на ней. Можно, не имѣя ни малѣйшаго представленія о формѣ кривой, въ то же время хорошо знать двѣ точки, черезъ которыя она проходитъ Поэтому то, не зная неопредѣленнаго интеграла, иногда возможно вычислить опредѣленный интегралъ, если предѣлами его служатъ не перемѣнныя величины, а числа. Очень часто удается этого достигнуть, примѣняя теоремы о дифференцированіи и интегрированіи по параметру, какъ то ясно показываютъ ниже слѣдующіе примѣры.

ИНТЕГРАЛЪ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{tg x} dx$

Неопредѣленнаго интеграла отъ подынтегральной функціи мы не можемъ вычислить. Но опредѣленный можемъ.

Для этого прежде всего замѣтимъ, что, такъ какъ въ подынтегральномъ выраженіи x измѣняется только отъ нуля до $\frac{\pi}{2}$, то мы можемъ написать, что

$$\int^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{tg x} dx = \int^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(tg x)}{tg x} dx \qquad (1)$$

и вотъ оказывается, что въ то время, какъ затруднительно вычислить прямо интегралъ (1), напротивъ легко вычисляется интегралъ болѣе общаго типа:

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx \qquad (2)$$

гдѣ a произвольное постоянное.

Этотъ любопытный фактъ, т.е. то, что нерѣдко оказывается легче рѣшить болѣе общую задачу, чѣмъ частный ея случай, часто наблюдается въ математикѣ.

Разсматривая u какъ функцію a, и примѣняя теорему о дифференцированіи опредѣленнаго интеграла по параметру, вычислимъ изъ (2) производную отъ u по a. Дифференцируя подынтегральное выраженіе по a, имѣемъ

$$\frac{du}{da} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x} \qquad (3)$$

Оказывается, что мы можемъ вычислить опредѣленный интегралъ правой части. Для этого сдѣлаемъ подстановку

$$\operatorname{tg} x = y \qquad x = \operatorname{arctg} y$$

Когда x мѣняется отъ нуля до $\frac{\pi}{2}$, то y измѣняется отъ 0 до $+\infty$ а потому

$$\frac{du}{da} = \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)(1+a^2y^2)} = \frac{1}{1-a^2}\int_0^\infty \frac{(1+a^2y^2) - a^2(1+y^2)}{(1+y^2)(1+a^2y^2)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{1-a^2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} - \frac{a^2}{1-a^2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+a^2y^2} \qquad (4)$$

Будемъ считать a положительнымъ и во второмъ интегралѣ правой части положимъ $ay = z$. Очевидно, что предѣлы для z будутъ тоже 0 и ∞, а потому

$$\int_0^\infty \frac{dy}{1+a^2y^2} = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2}$$

Если же въ подынтегральной функціи вмѣсто z опять напишемъ y, то (4) намъ дастъ

$$\frac{du}{da} = \frac{1-a}{1-a^2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+a} \qquad (5)$$

Мы вычислили производную отъ u по a, не зная пока выраженія для u, какъ функціи a. Но изъ (5) слѣдуетъ, что

$$u = \frac{\pi}{2}\int \frac{da}{a+1} = \frac{\pi}{2} \lg(a+1) + C, \qquad (6)$$

и мы вычислили u. Остается найти только значеніе постояннаго C, которое не мѣняется съ измѣненіемъ a. Для этого, принимая во

вниманіе значеніе u, пишемъ равенство

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx = \frac{\pi}{2} \lg(1+\alpha) + C$$

Это равенство справедливо при всякомъ положительномъ α. Полагаемъ, что α безконечно умаляется. Въ предѣлѣ, при $\alpha = 0$, получаемъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\, dx = \frac{\pi}{2} \lg 1 + C,$$

т.е. $C = 0$, а потому окончательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx - \frac{\pi}{2} \lg(1+\alpha)$$

Полагая же здѣсь $\alpha = 1$, находимъ искомый интегралъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx - \frac{\pi}{2} \lg 2 \qquad (7)$$

ИНТЕГРАЛЪ ПУАССОНА.

Пусть

$$A \int_0^{\infty} e^{x^2} dx \qquad (1)$$

Вмѣсто того, чтобы для обозначенія аргумента функціи пользоваться символомъ x, мы въ правѣ воспользоваться для его обозначенія и всякимъ инымъ какимъ-нибудь символомъ, такъ что, рядомъ съ равенствомъ (3), мы въ правѣ написать также, напримѣръ такое равенство

$$A \int_0^{\infty} e^{y^2} dy \qquad (2)$$

Крайнее остроуміе метода Пуассона заключается въ томъ, что онъ, считая x и y двумя различными переменными величинами, одновременно разсматриваетъ оба равенства (1) и (2), и вмѣсто того, чтобы вычислять A, вычисляетъ A^2 мы имѣемъ

$$A^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{y^2} dy\right) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \qquad (3)$$

Но первый интегралъ въ правой части мы можемъ разсматривать какъ постоянный множитель, стоящій передъ знакомъ второго интеграла, а потому мы его можемъ, какъ постоянный множитель, подвести подъ знакъ второго интеграла. Дѣлая это, получаемъ:

$$A^2 = \int_0^{\infty} \left\{ e^{-x^2} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right\} dx \qquad (4)$$

Интегралъ, стоящій въ скобкахъ множится на e^{-x^2}. Но относительно y величина x есть постоянная величина, а потому равен-

ство (4) преобразуется въ равенство

$$A^2 \int_0^\infty \Big\{ \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dy \Big\} dx \qquad (5)$$

Въ результатѣ оказывается, что величина A^2 можетъ быть получена съ помощью двукратнаго интегрированія, а именно функцію двухъ перемѣнныхъ

$$e^{x^2-y^2}$$

надо проинтегрировать сначала по y, потомъ по x.

Повидимому, излишнее осложненіе - вотъ все, чего мы достигли. Развѣ можно считать упрощеніемъ задачи, когда одно интегрированіе замѣняется двумя?

Но сдѣлаемъ въ первомъ интегралѣ, который приходится вычислять, т.е. интегралѣ

$$\int_0^\infty e^{x^2-y^2} dy \qquad (6)$$

подстановку Замѣчая, что при вычисленіи этого интеграла мы должны разсматривать y, какъ перемѣнную величину, а x, какъ произвольную постоянную положительную величину, мы полагаемъ:

$$y = xt$$

Ясно, такъ какъ x-положительно, что въ то время, какъ y возрастаетъ отъ нуля до безконечности, t тоже возрастаетъ отъ нуля до безконечности. Слѣдовательно, предѣлы для t тѣ же, что и для y, а потому

$$\int_0^\infty e^{x^2} y^2 dy \quad \int_0^\infty x e^{x^2(1+t^2)} dt,$$

и равенство (5) перепишется въ такой формѣ

$$A^2 = \int_0^\infty \Big\{ \int_0^\infty x e^{x^2(1+t^2)} dt \Big\} dx \qquad (7)$$

Перемѣнимъ теперь порядокъ интегрированія. Имѣемъ

$$A^2 \int_0^\infty \Big\{ \int_0^\infty e^{-x^2(1+t^2)} x\, dx \Big\} dt, \qquad (8)$$

и вотъ оказывается, что теперь мы можемъ произвести первое интегрированіе, потому что мы можемъ вычислить соотвѣтствующій неопредѣленный интегралъ. Въ самомъ дѣлѣ

$$\int e^{-x^2(1+t^2)} x\, dx = \frac{1}{2} \int e^{-x^2(1+t^2)} dx^2,$$

а потому

$$\int_0^\infty e^{x^2(1+t^2)} x\, dx - \Big/_{x}^{x\ \infty} - \frac{e^{x^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2(1+t^2)},$$

и равенство (10) принимает слѣдующій видъ

$$A^2=\int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)} = \int_0^\infty \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{4},$$

и слѣдовательно $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Интегралъ Пуассона вычисленъ. Чтобы отчетливѣе отмѣтить всѣ важнѣйшіе моменты примѣненнаго метода, мы можемъ изобразить весь путь вычисленія въ слѣдующей схемѣ:

$$A \int_0^\infty e^{-x^2} dx \qquad A=\int_0^\infty e^{-y^2} dy$$

а потому

$$A^2=\int_0^\infty \{\int_0^\infty e^{x^2 \; y^2} dy\} dx = \int_0^\infty \{e^{x^2(1+t^2)} x\, dt\} dx =$$

$$= \int_0^\infty \{\int_0^\infty e^{x^2(1+t^2)} x\, dx\} dt = \int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{\pi}{4},$$

и слѣдовательно

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (9)$$

Этотъ интегралъ Пуассона часто представляютъ нѣсколько въ иной формѣ. Дѣлаемъ подстановку.

$$x = -z$$

Когда x возрастаетъ отъ нуля до $+\infty$, то z измѣняется отъ нуля до $-\infty$, а потому послѣ подстановки изъ (9) получаемъ.

$$-\int_0^\infty e^{z^2} dz - \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Переставляя же предѣлы интеграла, и снова вмѣсто z написавъ x, найдемъ, что

$$\int_\infty^0 e^{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (10)$$

Складывая (9) и (10), имѣемъ

$$\int_{\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad (11)$$

Это и есть другая форма интеграла Пуассона, о которой мы говорили

Сдѣлаемъ въ (9) подстановку

$$x = \sqrt{y} \qquad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

Предѣлы для y очевидно будутъ тоже нуль и $+\infty$, а потому

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y}\, dy}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Замѣняя же здѣсь символъ y снова символомъ x, получимъ

$$\int_0^\infty \frac{e^{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi} \qquad (12)$$

Эту форму интеграла Пуассона тоже не мѣшаетъ замѣтить. Также не мѣшаетъ обратить вниманіе на то, что теперь подынтегральная функція прерывна при нижнемъ предѣлѣ

ИНТЕГРАЛЫ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ $\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx$

Очень часто, имѣя какой-нибудь интегралъ, мы можемъ подвергнуть его цѣлому ряду такихъ преобразованій, что въ результатѣ получимъ новые интегралы, относительно которыхъ было бы очень трудно предположить, что они стоятъ въ такой тѣсной связи съ даннымъ интеграломъ. Слѣдующія преобразованія даютъ весьма поучительный примѣръ. Замѣчая что

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = \int e^{ax}\,d\sin x = \frac{1}{a}\int \cos x\,d e^{ax}$$

и интегрируя въ томъ и другомъ случаѣ по частямъ, получаемъ

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = e^{ax}\sin x - a\int e^{ax}\sin x\,dx$$

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos x - \frac{1}{a}\int e^{ax}\sin x\,dx$$

Умноживъ второе равенство на a^2 и складывая съ первымъ, найдемъ

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = e^{ax}\frac{\sin x - a\cos x}{1+a^2}$$

Простое же вычитаніе второго равенства изъ перваго даетъ

$$\int e^{ax}\sin x\,dx = e^{ax}\frac{\cos x + a\sin x}{1+a^2}$$

Пусть $a > 0$ *) Безъ особаго труда найдемъ, что

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx = \frac{a}{1+a^2} \qquad (1)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx = \frac{1}{1+a^2} \qquad (2)$$

Здѣсь a можетъ быть любой положительной величиной. Поэтому мы

*) *при безконечномъ возрастаніи x, выраженіе e^{ax} стремится къ нулю только если a положительно*

можемъ разсматривать ее какъ перемѣнную величину. Тогда въ подынтегральныхъ выраженіяхъ она будетъ играть роль параметра.

Интегрируя обѣ части полученныхъ равенствъ по a отъ нуля до a, мы имѣемъ:

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^a e^{-ax} \cos x \, da \right\} dx = \int_0^a \frac{a \, da}{1+a^2}$$

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^a e^{-ax} \sin x \, da \right\} dx = \int_0^a \frac{da}{1+a^2}$$

всѣ интегрированія по a мы можемъ произвести, и въ результатѣ получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} \lg (1+a^2) \qquad (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x} \sin x \, dx = \operatorname{arctg} a \qquad (4)$$

Эти равенства справедливы при всякомъ положительномъ a. Вообразимъ, что a безконечно возрастаетъ. Такъ какъ x положительно, то e^{-ax} въ предѣлѣ, при $a=+\infty$, обращается въ нуль. При этомъ равенство (3) обратится въ равенство

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x} dx = \frac{1}{2} \lg (1+\infty) = \infty$$

которое показываетъ, что обобщеннаго интеграла, стоящаго въ лѣвой части, не существуетъ.

Не то даетъ намъ равенство (4), потому что изъ него, при $a = +\infty$ мы получаемъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \qquad (5)$$

Мы подвергнемъ этотъ интегралъ дальнѣйшимъ преобразованіямъ. Пусть p произвольно взятая положительная величина. Сдѣлаемъ подстановку

$$x = py$$

Очевидно, когда x возрастаетъ отъ нуля до безконечности, то y измѣняется въ тѣхъ же предѣлахъ, а потому имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin (py) \, dy}{y} = \frac{\pi}{2}$$

или, снова замѣнивъ символъ y символомъ x, получимъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin (px) \, dx}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad (6)$$

Любопытно отмѣтить, что, хотя въ лѣвую часть и входитъ p, но величина ея не зависитъ отъ p.

Пусть теперь a и b двѣ произвольно взятыхъ положительныхъ

величины но взятыхъ такъ, что $a > b$ Тогда ихъ сумма $a+b$ и ихъ разность $a-b$ будутъ положительны, а потому въ (6) мы можемъ замѣнить p какъ черезъ $a+b$, такъ и черезъ $a-b$ Дѣлая это, получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx + \cos ax \sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx - \cos ax \sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Складывая эти равенства а затѣмъ вычитая одно изъ другого, находимъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad (7)$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\,dx = 0. \qquad a > b$$

Во второмъ равенствѣ вмѣсто a и b соотвѣтственно напишемъ b и a. Получимъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = 0, \qquad (8)$$

но теперь это равенство справедливо уже при условіи что $a < b$

Сравнивая (7) и (8), приходимъ къ любопытному заключенію: интегралъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx \qquad (9)$$

при положительныхъ a и b имѣетъ различныя значенія въ зависимости отъ относительныхъ величинъ a и b а именно

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } a > b$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = 0, \quad \text{если } a < b,$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{4} - \quad \text{если } a = b$$

Послѣднее равенство получимъ изъ (6), замѣняя p черезъ $2a$

Возьмемъ интегралъ (5) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Перепишемъ его такъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d\lg\sin x = \frac{\pi}{2}\lg 2$$

Интегрированіе по частямъ даетъ *)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d\lg\sin x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg\sin x\,dx,$$

а потому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\lg 2 \qquad (10)$$

----

*) *Потому, что, примѣняя правило Лопиталя, найдемъ, что*

$[x \lg \sin x] = \lim$ [illegible] $= 0$

Полагаемъ здѣсь $x = \frac{\pi}{2} - y$. Предѣлы для y будутъ $\frac{\pi}{2}$ и 0, а потому

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \lg\cos y\, dy = -\frac{\pi}{2}\lg 2$$

Пишемъ здѣсь вмѣсто y опять x. Получаемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg\cos x\, dx = -\frac{\pi}{2}\lg 2 \qquad (11)$$

Вычитая (11) изъ (10), найдемъ, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{tg} x\, dx = 0 \qquad (12)$$

Такъ, вычисливъ одинъ интегралъ, мы изъ него получили рядъ другихъ.

ВЫЧИСЛЕНІЕ ИНТЕГРАЛОВЪ ЧЕРЕЗЪ РЯДЫ.

Когда не удается найти простое выраженіе для искомаго интеграла, то часто съ выгодой можно прибѣгнуть къ разложенію функціи въ ряды. Пусть, напр., требуется вычислить интегралъ:

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx$$

Вспоминая разложеніе e^x въ рядъ Маклорена, имѣемъ

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \ldots$$

а потому

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx = \int_0^1 dx + \frac{1}{2!}\int_0^1 x\, dx + \frac{1}{3!}\int_0^1 x^2\, dx + \ldots$$

и окончательно

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx = 1 + \frac{1}{2.2!} + \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{4.4!} + \ldots$$

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНІЕ ИНТЕГРАЛОВЪ

Когда никакимъ путемъ не удается вычислить опредѣленнаго интеграла, то тогда вычисляютъ его приближенно.

Существуетъ много методовъ приближеннаго вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ. Самая трудная ихъ сторона, это оценка приближенія. Мы разсмотримъ нѣсколько такихъ методовъ, ограничиваясь только изложеніемъ ихъ идеи и оставляя въ сторонѣ вопросъ о точности вычисленія.

Мы всегда можемъ предположить, что въ интегралѣ, который требуется вычислить, подинтегральная функція положительна, по-

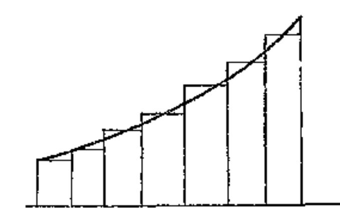
тому что, если бы это условіе не соблюдалось, то мы могли бы предварительно разбить интервалъ интеграціи на подынтервалы, въ каждомъ изъ которыхъ функція сохраняетъ свой знакъ. Послѣ этого мы вычисляли бы интегралъ по каждому подынтервалу отдѣльно, причемъ, если бы въ какомъ-нибудь подынтервалѣ подынтегральная функція оказалась бы отрицательной то мы измѣнили бы ея знакъ на обратный черезъ что интегралъ тоже только измѣнилъ бы свой знакъ.

Итакъ будемъ предполагать что данная функція $f(x)$ положительна въ интервалѣ (a, b) Если мы изобразимъ эту функцію кривой, то величина интеграла

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

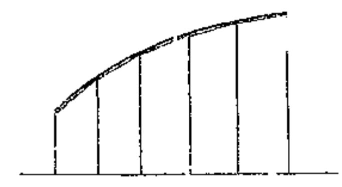
равна площади соотвѣтствующей кривой трапеціи. Поэтому задача о приближенномъ вычисленіи интеграла равносильна задачѣ о приближенной квадратурѣ кривой трапеціи.

Самый грубый способъ приближеннаго вычисленія заключается

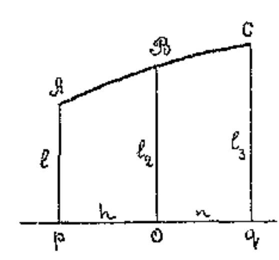


въ томъ что раздѣливъ основаніе трапеціи на достаточно большое число подынтерваловъ точками x, x_2, ... x_{n-1}, мы строимъ элементарные прямоугольники и принимаемъ сумму площадей ихъ за величину искомаго интеграла.

Болѣе же точное значеніе, какъ то геометрически очевидно, мы получимъ такъ: возставивъ ординаты въ точкахъ x_k, мы соединяемъ хордами концы всякихъ двухъ смежныхъ ординатъ. Тогда мы



получимъ рядъ обыкновенныхъ трапецій. Вычисливъ значенія функціи въ каждой точкѣ x_k, мы получимъ возможность вычислить площадь каждой трапеціи. Сумму ихъ мы примемъ за величину интеграла. Этотъ способъ приближеннаго вычисленія называется способомъ трапецій. Сущность его заключается въ томъ, что всякую часть дуги данной кривой мы замѣняемъ ея хордой. Очевидно, что мы получимъ болѣе точное приближеніе, если дугу кривой замѣнимъ кривою же, но болѣе простого типа. Рѣшимъ предварительно слѣдующую задачу: пусть требуется приближенно вычислить площадь к. трапеціи $pqABC$, ограниченной сверху кривой, относительно которой мы знаемъ только то, что она проходитъ черезъ три точки ABC



Мы предположимъ, что проэкція точки $\mathfrak{B}$ дѣлитъ основаніе трапеціи pq пополамъ. Точку O примемъ за начало координатъ. Пусть h и $-h$ будутъ абсциссы точекъ $\mathfrak{A}$ и C, черезъ l, l_2, l_3 означимъ ординаты точекъ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, C.

Разъ кривая неизвѣстна, то за нее естественно принять такую кривую, которая проходила бы черезъ точки $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, C и для которой зависимость ординаты отъ абсциссы выражалась бы по возможности просто. Послѣ прямой такою кривой будетъ кривая уравненіе которой

$$y = a + bx + cx^2 \qquad (1)$$

т.е. парабола, ось которой параллельна оси x.

Посмотримъ, можно ли a, b, c подобрать такъ, чтобы кривая (1) проходила черезъ точки $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, C. Для этого координаты этихъ точекъ должны удовлетворять уравненію (1), что даетъ равенства:

$$l_1 = a - bh + ch^2$$
$$l_2 = a,$$
$$l_3 = a + bh + cn^2,$$

изъ которыхъ не трудно найти:

$$a = l_2 \qquad b = \frac{l_3 - l_2}{2h}, \qquad c = \frac{l_1 + l_3 - 2l_2}{2h^2}$$

Следовательно, кривая

$$y = l_2 + \frac{l_3 - l_2}{2h}x + \frac{l_1 + l_3 - 2l_2}{2h^2}x^2 \qquad (2)$$

проходитъ черезъ точки $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, C. Она и изображена на чертежѣ. Принимая ее вмѣсто неизвѣстной кривой, мы приближенно имѣемъ.

$$u = \int_h^{+h}\left\{l_2 + \frac{l_3 - l_2}{2h}x + \frac{l + l_3 - 2l_2}{2h^2}x^2\right\}dx$$

Вычисляя найдемъ

$$u = \frac{h(l + l_3 + 4l_2)}{3} \qquad (3)$$

Это значеніе мы примемъ за приближенное значеніе площади, ограниченной сверху неизвѣстной кривой.

Пусть теперь требуется вычислить площадь $a\mathfrak{A}\mathfrak{B}b$, ограниченную кривой $y = f(x)$. Дѣлимъ основаніе ab на четное число $2n$ равныхъ частей; пусть h - длина каждой изъ нихъ. Въ точ-

какъ дѣленія возставляемъ ординаты $y_0, y_1, \ldots y_{2n}$ предполагаемъ, что длины ихъ вычислены. Обозначимъ черезъ $u_1, u_2 \ldots$ площади, ограниченныя съ двухъ сторонъ четными (на чертежѣ жирными) ординатами. По формулѣ (3) имѣемъ:

$$u_1 = \frac{h}{3}(y_0 + y_2 + 4y_1)$$
$$u_2 = \frac{h}{3}(y_2 + y_4 + 4y_3)$$
$$u_3 = \frac{h}{3}(y_4 + y_6 + 4y_5)$$
$$\ldots$$
$$u_{n-1} = \frac{h}{3}(y_{2n-4} + y_{2n-2} + 4y_{2n-3})$$
$$u_n = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + y_{2n} + 4y_{2n-1}).$$

Складывая всѣ эти равенства, получаемъ слѣдующую формулу для приближеннаго вычисленія интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left\{y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\right\}$$

Эта формула называется формулой Симпсона.

ИНТЕГРАЛЪ $\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$

Возьмемъ функцію

$$u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} \qquad (1)$$

и вычислимъ ея частныя производныя. Имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad (2)$$

Слѣдовательно

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \qquad (3)$$

Интегрируемъ лѣвую часть по x въ предѣлахъ отъ 0 до 1. Имѣемъ

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx = -\Big|_{x=0}^{x=1} \frac{x}{x^2+y^2},$$

а потому

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = -\frac{1}{1+y^2}$$

интегрируя это равенство по y тоже въ предѣлахъ отъ 0 до 1, найдемъ:

$$\int_0^1\left\{\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right\}dy = \left[-\operatorname{arctg} y\right]_0^1 = -\frac{\pi}{4} \qquad (4)$$

Но если мы лѣвую часть (3) проинтегрируемъ по y въ тѣхъ же предѣлахъ, то найдемъ, что

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy = \Big/_{y\ 0}^{y\ 1} \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

а потому

$$\int_0^1 \left\{\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right\}dx = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \qquad (5)$$

Сравнивая (4) и (5) мы видимъ, что, интегрируя два раза функцію

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad (6)$$

сначала по одному перемѣнному, а потомъ по другому, мы будемъ получать различныя величины въ зависимости отъ порядка интегрированія. Но функція (6) при $x=0$ и $y=0$ принимаетъ неопредѣленный видъ. Такъ какъ она не принадлежитъ такимъ образомъ къ непрерывнымъ функціямъ, то, слѣдовательно, тѣ интегралы, которые мы брали, есть обобщенные интегралы. Отсюда заключеніе теорема объ интегрированіи по параметру не всегда бываетъ справедлива для обобщенныхъ интеграловъ.

Но такіе случаи, какъ показываютъ болѣе тонкія изслѣдованія, бываютъ только въ видѣ исключенія. Поэтому, вообще говоря, какъ теорему объ интегрированіи по параметру, такъ и теорему о дифференцированіи по параметру можно примѣнять и для обобщенныхъ интеграловъ.*)

ГЛАВА VI ЭКВИВАЛЕНТНЫЯ ВЕЛИЧИНЫ.

Понятіе о производной и понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ повели къ возникновенію двухъ самостоятельныхъ и весьма обширныхъ отдѣловъ математики дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Но легко видѣть, что по существу тотъ и другой отдѣлъ есть не что иное какъ отдѣльныя главы теоріи предѣловъ. Въ самомъ дѣлѣ, производной мы называемъ предѣлъ отношенія приращенія функціи къ приращенію аргумента

$$f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ мы вводимъ, разсматривая предѣлъ интегральной суммы:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_0^b f(x)\Delta x$$

*) *Подробнѣй объ этомъ см. часть 2-ю*

Поэтому казалось бы, что для вычисленія производныхъ и интеграловъ достаточно общей теоріи предѣловъ. Чѣмъ же объяснить что дифференціальное и интегральное исчисленія существуютъ какъ самостоятельные отдѣлы математики?

Причина этого легко усматривается. Она заключается въ томъ, что для вычисленія производныхъ и интеграловъ необходимо вычислять предѣлы такихъ выраженій, для которыхъ какъ разъ непримѣнимы общія теоремы о предѣлахъ. Дѣйствительно, для вычисленія производной мы должны найти предѣлъ отношенія, предполагая, что числитель и знаменатель этого отношенія безконечно умаляются. Но извѣстно, что теорема о предѣлѣ частнаго

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$$

какъ разъ не примѣнима въ томъ случаѣ, когда предѣлы числителя и знаменателя одновременно равны нулю.

Съ подобнымъ же затрудненіемъ мы встрѣчаемся и въ интегральномъ исчисленіи. Съ геометрической точки зрѣнія опредѣленный интегралъ есть площадь трапеціи, разсматриваемая, какъ предѣлъ суммы безконечно умаляющихся элементарныхъ прямоугольниковъ, въ безконечно возрастающемъ числѣ. Слѣдовательно, въ данномъ случаѣ мы имѣемъ сумму, у которой одновременно мѣняются не только сами слагаемыя но и число ихъ. Но теорема о предѣлѣ суммы

$$\lim (x \pm y \pm \qquad \pm z) = \lim x \pm \lim y \pm \qquad \pm \lim z$$

предполагаетъ, что хотя слагаемыя и мѣняются, но число ихъ остается все время одно и то же, а потому эта теорема не примѣнима къ вычисленію предѣловъ суммы съ измѣняющимся числомъ слагаемыхъ.

Такимъ образомъ оказывается что вычисленіе производныхъ и опредѣленныхъ интеграловъ требуетъ умѣнья вычислять предѣлы такихъ выраженій, для вычисленія которыхъ не примѣнимы общія теоремы о предѣлахъ. Это и является причиной того, что дифференціальное и интегральное исчисленія существуютъ, какъ самостоятельные отдѣлы математики. Но къ вычисленію предѣловъ отношеній безконечно умаляющихся величинъ, кромѣ задачи о вычисленіи производныхъ, приводитъ цѣлый рядъ другихъ задачъ.

Точно также существуетъ цѣлый рядъ задачъ для рѣшенія которыхъ необходимо умѣть вычислять предѣлы суммъ безконечно умаляющихся слагаемыхъ въ безконечно возрастающемъ числѣ, причемъ эти суммы нѣсколько иного типа чѣмъ тѣ, которыя привели насъ къ

понятію объ опредѣленномъ интегралѣ.

И вотъ, возникаетъ вопросъ: нельзя ли найти правила для вычисленія предѣловъ подобныхъ отношеній и суммъ. Оказывается, что такія правила, или, какъ принято говорить, принципы, могутъ быть даны. Эти принципы опираются на понятіе объ эквивалентныхъ величинахъ.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЯ ВЕЛИЧИНЫ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ. ПЕРЕМѢННАЯ ВЕЛИЧИНА u НАЗЫВАЕТСЯ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ИЛИ РАВНОСИЛЬНОЙ ПЕРЕМѢННОЙ ВЕЛИЧИНѢ v, ЕСЛИ ПРЕДѢЛЪ ОТНОШЕНІЯ $\frac{u}{v}$ РАВЕНЪ ЕДИНИЦѢ.

ЧТОБЫ УКАЗАТЬ, ЧТО ВЕЛИЧИНА u ЭКВИВАЛЕНТНА ВЕЛИЧИНѢ v, МЫ БУДЕМЪ ПИСАТЬ ТАКЪ:

$$u \approx v$$

ЧТО ЧИТАТЬ НАДО ТАКЪ: u ЭКВИВАЛЕНТНО v. ЗНАКЪ „$\approx$" БУДЕМЪ НАЗЫВАТЬ ЗНАКОМЪ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. *)

Такимъ образомъ, утверждать, что

$$u \approx v, \qquad (1)$$

значитъ не что иное, какъ утверждать, что

$$\lim \frac{u}{v} = 1 \qquad (2)$$

Обратно, если мы имѣемъ (2), то мы всегда имѣемъ право написать (1). Оба эти выраженія, по существу, заключаютъ въ себѣ одну и ту же математическую идею.

Не мѣшаетъ обратить вниманіе, что опредѣленіе ровно ничего не говоритъ о томъ, имѣютъ ли сами эквивалентныя величины u и v предѣлы, или ихъ не имѣютъ.

Примѣры эквивалентныхъ величинъ. Пусть x безконечно умаляется. Въ такомъ случаѣ $\sin x$ тоже безконечно умаляется. Какъ извѣстно

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1$$

Слѣдовательно $\sin x \approx x$, т. е. синусъ безконечно умаляющейся дуги эквивалентенъ самой дугѣ.

---

*) Этотъ знакъ отличается отъ знака равенства тѣмъ, что вмѣсто прямыхъ черточекъ мы беремъ изогнутыя. Надо замѣтить, что вообще знакъ „$\approx$" не имѣетъ одного и того же общепринятаго значенія. Имъ пользуются для самыхъ разнообразныхъ цѣлей. Мы имъ всегда будемъ пользоваться, како знакомъ эквивалентности.

Мы видимъ, что эквивалентныя величины могутъ быть безконечно умаляющимися.

Пусть

$$y = x^2 + x + 1$$

и пусть x безконечно возрастаетъ. Имѣемъ

$$\frac{y}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2},$$

а потому

$$\lim_{x=+\infty} \frac{y}{x^2} = 1$$

Слѣдовательно, $y \approx x^2$. Мы видимъ, что эквивалентныя величины могутъ быть безконечно возрастающими. Пусть

$$y = \frac{1 + x^2}{2 + x} \qquad z = 5 - x$$

и пусть x имѣетъ предѣломъ 3. Имѣемъ:

$$\lim_{x=3} y = 2 \quad , \quad \lim_{x=3} z = 2,$$

а потому

$$\lim \frac{y}{z} = 1$$

Слѣдовательно, $y \approx z$. Мы видимъ, что эквивалентныя величины могутъ имѣть конечные неравные нулю предѣлы.

Пусть, наконецъ,

$$y = \sin x \quad , \quad z = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sin x$$

и пусть x безконечно возрастаетъ.

Когда x безконечно возрастаетъ, то $\sin x$ не стремится ни къ какому предѣлу. Слѣдовательно y и z не имѣютъ предѣла. Но

$$\frac{z}{y} = 1 + \frac{1}{x},$$

$$\lim \frac{z}{y} = 1,$$

а потому $z \approx y$.

Мы видимъ, что эквивалентными величинами могутъ быть величины, не имѣющія предѣла.

Такимъ образомъ оказывается, что понятіе о эквивалентныхъ величинахъ весьма широко. Эквивалентными величинами могутъ быть какъ безконечно умаляющіяся, такъ и безконечно возрастающія, какъ величины, имѣющія предѣлы, такъ и величины, не имѣющія ихъ.

<u>ЛЕММА.</u> Если всѣ члены отношеній

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \quad \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \qquad \qquad \frac{\beta_n}{\alpha_n} \qquad (1)$$

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ, ТО ВЕЛИЧИНА ОТНОШЕНІЯ

$$\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots\ldots\ldots+\beta_n}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\qquad\ldots+\alpha_n}$$

ЗАКЛЮЧАЕТСЯ МЕЖДУ НАИБОЛЬШИМЪ И НАИМЕНЬШИМЪ ИЗЪ ОТНОШЕНІИ(1).

Пусть $\frac{\beta'}{\alpha}$ наименьшее, а $\frac{\beta''}{\alpha''}$ наибольшее изъ отношеній(1). Слѣдовательно

$$\frac{\beta'}{\alpha}\leqq\frac{\beta_1}{\alpha}\leqq\frac{\beta}{\alpha},\quad \text{а потому}\quad \frac{\beta}{\alpha}\alpha\leqq\beta_1\leqq\frac{\beta''}{\alpha'}\alpha_1$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\leqq\frac{\beta_2}{\alpha_2}\leqq\frac{\beta}{\alpha}\qquad\qquad \frac{\beta}{\alpha}\alpha_2\leqq\beta_2\leq\frac{\beta}{\alpha''}\alpha_2$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\leqq\frac{\beta_n}{\alpha_n}\leqq\frac{\beta''}{\alpha''}\qquad\qquad \frac{\beta}{\alpha}\alpha_n\leqq\beta_n\leqq\frac{\beta}{\alpha}\alpha_n$$

Складывая неравенства праваго столбика, получимъ

$$\frac{\beta'}{\alpha}(\alpha+\alpha_2+\qquad+\alpha_n)\leqq\beta_1+\beta_2+\qquad+\beta_n\leqq\frac{\beta''}{\alpha}(\alpha_1+\alpha_2+\qquad+\alpha_n)$$

а потому

$$\frac{\beta}{\alpha}\leqq\frac{\beta+\beta_2+\qquad+\beta_n}{\alpha+\alpha_2+\qquad+\alpha_n}\leqq\frac{\beta}{\alpha},$$

и лемма доказана

Мы переходимъ теперь къ доказательству нѣсколькихъ теоремъ относительно эквивалентныхъ величинъ Доказываются эти теоремы чрезвычайно просто, опираясь исключительно на тотъ фактъ, что, если

$$u\approx v, \tag{1}$$

то

$$\lim\frac{u}{v}\ 1 \tag{2}$$

и на то, что изъ(2) всегда слѣдуетъ(1), какъ увидимъ, теоремы объ эквивалентныхъ величинахъ удивительно аналогичны соотвѣтствующимъ теоремамъ о равныхъ величинахъ

<u>ТЕОРЕМА</u>. ВСЯКАЯ ВЕЛИЧИНА ЭКВИВАЛЕНТНА САМА СЕБѢ

Дѣйствительно, всегда

$$\lim\frac{u}{u}\ 1$$

а потому $u\approx u$

<u>ТЕОРЕМА</u>. ЕСЛИ $u\approx v$, ТО $v\approx u$

Потому что, если

$$\lim\frac{u}{v}=1,$$

то

$$\lim\frac{v}{u}=1$$

ТЕОРЕМА. РАВНЫЯ ВЕЛИЧИНЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫ

Потому что, если $u = v$, то

$$\lim \frac{u}{v} = 1,$$

и слѣдовательно $u \approx v$

ТЕОРЕМА. ДВѢ ВЕЛИЧИНЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЯ ТРЕТЬЕЙ, ЭКВИВАЛЕНТНЫ МЕЖДУ СОБОЙ.

Требуется доказать, что, если

$$u \approx w \qquad v \approx w \qquad (1)$$

то

$$u \approx v \qquad (2)$$

Имѣемъ

$$\frac{u}{v} = \left(\frac{u}{w}\right)\left(\frac{w}{v}\right)$$

Благодаря (1) предѣлъ каждаго множителя въ правой части равенъ единицѣ, а потому

$$\lim \frac{u}{v} = 1,$$

т.е. $u \approx v$

ТЕОРЕМА. ПРОИЗВЕДЕНІЯ СООТВѢТСТВЕННО ЭКВИВАЛЕНТНЫХЪ МНОЖИТЕЛЕЙ, ЭКВИВАЛЕНТНЫ.

Требуется доказать, что если

$$\alpha \approx \alpha' \quad \beta \approx \beta' \quad \gamma \approx \gamma' \qquad \delta \approx \delta' \qquad (1)$$

то

$$\alpha\beta\gamma \ldots \delta \approx \alpha'\beta'\gamma' \ldots \delta' \qquad (2)$$

Имѣемъ

$$\frac{\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\delta}{\alpha'\cdot\beta'\cdot\gamma'\ldots\ldots\delta'} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)\left(\frac{\beta}{\beta'}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right) \qquad \left(\frac{\delta}{\delta'}\right)$$

Благодаря (1) каждый множитель правой части въ предѣлѣ равенъ единицѣ, а потому

$$\lim \frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\ldots\ldots\delta}{\alpha'\cdot\beta'\cdot\gamma'\ldots\ldots\delta'} = 1,$$

т. е. имѣемъ (2).

ТЕОРЕМА. ОТНОШЕНІЯ СООТВѢТСТВЕННО ЭКВИВАЛЕНТНЫХЪ ВЕЛИЧИНЪ ЭКВИВАЛЕНТНЫ.

Требуется доказать, что, если

$$\alpha \approx \alpha' \quad \beta \approx \beta' \qquad (1)$$

то

$$\frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{\alpha'}{\beta'} \qquad (2)$$

Имѣемъ

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\alpha'}{\beta'}} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)$$

Слѣдовательно

$$\lim \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1$$

а потому (2)

ТЕОРЕМА. СУММЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХЪ СООТВѢТСТВЕННО ЭКВИВАЛЕНТНЫХЪ ВЕЛИЧИНЪ ЭКВИВАЛЕНТНЫ

Пусть

$$\alpha \approx \beta \quad \alpha_2 \approx \beta_2 \quad \alpha_3 \approx \beta_3 , \qquad \alpha_n \approx \beta_n , \tag{1}$$

гдѣ всѣ величины положительны.

Требуется доказать, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \qquad + \alpha_n \approx \beta + \beta_2 + \beta_3 + \qquad + \beta_n \tag{2}$$

Изъ отношенiй

$$\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta_2}{\alpha_2} \quad \frac{\beta_3}{\alpha_3} \qquad \frac{\beta_n}{\alpha_n} \tag{3}$$

Пусть

$$\frac{\beta}{\alpha} \quad и \quad \frac{\beta}{\alpha''} \tag{4}$$

наименьшее и наибольшее Согласно леммѣ, имѣемъ

$$\frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n} \leq \frac{\beta''}{\alpha} \tag{5}$$

Благодаря (1) всякое изъ отношенiй (3) имѣетъ предѣломъ единицу. Слѣдовательно, каждое изъ отношенiй (4) въ предѣлѣ тоже равно единицѣ а потому изъ (5) слѣдуетъ, что

$$\lim \frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{\alpha + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} = 1,$$

т е (2). Теорема доказана.

Мы видимъ, что основныя теоремы объ эквивалентныхъ величинахъ аналогичны соотвѣтствующимъ теоремамъ о равныхъ величинахъ. Подобно равнымъ величинамъ, складывая, умножая и дѣля эквивалентныя величины, мы получимъ эквивалентныя же величины. Полнѣйшая аналогiя нарушается только тѣмъ, что складывать эквивалентныя величины можно только положительныя. Вычитать же эквивалентныя величины нельзя. Въ этомъ можно убѣдиться на слѣдующемъ примѣрѣ

Пусть x безконечно умаляется Имѣемъ

$$\lim_{x=0} \left(\frac{x + x^2}{\sin x}\right) = \lim_{x=0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)(1 + x) = 1$$

Слѣдовательно

$$\sin x \approx x + x^2 \tag{1}$$

В то же время

$$x \approx x \tag{2}$$

Если бы эквивалентныя величины можно было бы вычитать, то изъ (1) и (2) мы имѣли бы, что

$$\sin x - x \approx x^2,$$

т. е. имѣли бы, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 1$$

Въ дѣйствительности же, примѣняя правило Лопиталя, найдемъ, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$$

Слѣдовательно, вычитаніе эквивалентныхъ величинъ можетъ не дать эквивалентныхъ величинъ.

Необходимо отмѣтить слѣдующую теорему, аналогичной которой нѣтъ въ теоріи равныхъ величинъ.

ТЕОРЕМА. ВЕЛИЧИНА, ПРОМЕЖУТОЧНАЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ, ЭКВИВАЛЕНТНА ЭТИМЪ ВЕЛИЧИНАМЪ.

Пусть z промежуточная величина между двумя величинами x и y, причемъ извѣстно, что

$$x \approx y \qquad (1)$$

Требуется доказать, что

$$z \approx x \approx y \qquad (2)$$

Величину z какъ промежуточную между x и y, мы можемъ представить въ такомъ видѣ

$$z = x + \theta(y - x),$$

гдѣ $0 < \theta < 1$, а потому

$$\frac{z}{x} = 1 + \theta\left(\frac{y}{x} - 1\right)$$

Благодаря (1), множитель при θ въ предѣлѣ равенъ нулю. Слѣдовательно

$$\lim \frac{z}{x} = 1$$

и теорема доказана. Этой теоремой часто приходится пользоваться для установленія эквивалентности разсматриваемыхъ величинъ.

ПЕРВЫЙ ПРИНЦИПЪ ИСЧИСЛЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩИХСЯ.

Эквивалентныя величины могутъ имѣть предѣломъ конечную величину, а также могутъ быть и безконечно возрастающими, и безконечно умаляющимися. Наконецъ, каждая изъ перемѣнныхъ величинъ можетъ не стремиться ни къ какому предѣлу. Особаго вниманія понятіе объ эквивалентности заслуживаетъ въ ея приложеніи къ безконечно умаляющимся величинамъ. Можно даже сказать, что въ Ана-

лизѣ эквивалентныя величины разсматриваются почти исключительно только безконечно умаляющіяся величины, относительно которыхъ имѣетъ мѣсто первый принципъ исчисленія безконечно умаляющихся Такъ называется слѣдующая теорема:

ПРИ ВЫЧИСЛЕНІИ ПРЕДѢЛА ОТНОШЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИНЪ МОЖНО КАЖДЫЙ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩІЙСЯ МНОЖИТЕЛЬ ЗАМѢНЯТЬ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЕМУ ВЕЛИЧИНОЙ.

Пусть α, α, W W' безконечно умаляющіяся величины. Требуется доказать, что, если

$$\alpha\approx\alpha',\ \beta\approx\beta\ \ldots\ldots\ \gamma\approx\gamma', \qquad u\approx u\ \ v\approx v\ \ \ldots\ w\approx W, \tag{1}$$

то

$$\lim \frac{\alpha\,\beta\ldots\ldots\ldots\gamma}{u\cdot v\ldots\ldots\ldots w}=\lim\frac{\alpha'\cdot\beta'\ldots\ldots\ldots\gamma'}{u'\cdot v'\ldots\ldots\ldots w} \tag{2}$$

Доказательство просто. Имѣемъ равенство

$$\frac{\alpha\cdot\beta\ldots\ldots\ldots\gamma}{u\cdot v\ldots\ldots w}=\left(\frac{\alpha'\cdot\beta\ldots\ldots\ldots\gamma}{u'\cdot v'\ldots\ldots w'}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\beta}\right)\quad\left(\frac{\gamma}{\gamma}\right)\left(\frac{u}{u}\right)\left(\frac{v}{v}\right)\quad\left(\frac{w}{w}\right)$$

Благодаря (1), всѣ множители правой части, кромѣ перваго, въ предѣлѣ равны единицѣ, а потому имѣемъ (2). Принципъ доказанъ.

Этотъ принципъ имѣлъ большое значеніе при началѣ развитія Анализа, но теперь имъ пользуются чрезвычайно рѣдко. Однако очень часто, благодаря ему, сильно сокращаются вычисленія. Докажемъ лемму

ЕСЛИ x БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЕТСЯ, ТО

$$x\approx\sin x\approx\arcsin x\approx\operatorname{arctg} x \tag{3}$$

Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя правило Лопиталя, легко найдемъ что

$$\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x=0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x=0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1,$$

а потому (3)

Пусть теперь требуется вычислить предѣлъ выраженія

$$\frac{\sin\frac{1}{n^2}\quad\arcsin\frac{2}{n\sqrt{n}}}{\operatorname{tg}\frac{3}{n\sqrt{n}}\quad\operatorname{arctg}\frac{5}{n\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

при $n-\infty$

При безконечномъ возрастаніи n аргументы всѣхъ функціи безконечно умаляются Но мы видѣли что если x безконечно умаляется, то

$$\sin x-\operatorname{tg} x\approx\arcsin x\approx\operatorname{arctg} x\approx x$$

Поэтому, замѣняя, согласно доказанному принципу каждую

функцію эквивалентнымъ ей аргументомъ, находимъ, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}\,\arcsin\frac{2}{n\sqrt{n}}}{\operatorname{tg}\frac{3}{n\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{5}{n\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\;\frac{2}{n\sqrt{n}}}{\frac{3}{n\sqrt{n}}\;\frac{5}{n\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{2}{15}$$

Задачи. 1) Показать, что

$$\lim_{x=0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\frac{3}{5},\qquad \lim_{x=0}\frac{\arcsin(ax)}{\operatorname{tg}(bx)}=\frac{a}{b},\qquad \lim_{x=0}\frac{\operatorname{arctg}x}{\arcsin 2x}=\frac{1}{2}$$

2) Показать, что, если x безконечно умаляется, то

$$x-\sin x\approx\frac{x^3}{6};\quad e^x-1\approx x,\quad 1-\cos x\approx\frac{x^2}{2}\cdot\ \lg(1+x)\approx x;\ e^x-e^{-2x}\approx 3x$$

ПРЕДѢЛЬНО-РАВНЫЯ ВЕЛИЧИНЫ.

Понятіе объ этихъ величинахъ вводимъ съ помощью слѣдующаго опредѣленія·

ВЕЛИЧИНА u НАЗЫВАЕТСЯ ПРЕДѢЛЬНО-РАВНОЙ ВЕЛИЧИНѢ v , ЕСЛИ ПРЕДѢЛЪ РАЗНОСТИ $u-v$ РАВЕНЪ НУЛЮ.

ЧТОБЫ ПОКАЗАТЬ, ЧТО u ПРЕДѢЛЬНО-РАВНО v БУДЕМЪ ПИСАТЬ ТАКЪ

$$u\equiv v,$$

ЧТО ЧИТАЕТСЯ ТАКЪ u ПРЕДѢЛЬНО-РАВНО v.*)

СЛѢДОВАТЕЛЬНО, ЕСЛИ

$$u\equiv v,\qquad (1)$$

ТО

$$\lim(u-v)=0\qquad (2)$$

ОБРАТНО, ИЗЪ (2) СЛѢДУЕТЪ (1).

Имѣемъ слѣдующія, почти очевидныя теоремы

ТЕОРЕМА. ЕСЛИ $u\equiv v$,ТО $v\equiv u$

Потому что, если

$$\lim(u-v)=0$$

то и

$$\lim(v-u)=0$$

ТЕОРЕМА. ДВѢ ВЕЛИЧИНЫ, ПРЕДѢЛЬНО-РАВНЫЯ ТРЕТЬЕЙ, ПРЕДѢЛЬНО-РАВНЫ МЕЖДУ СОБОЙ.

Пусть

$$u\equiv w\ ,\ v\equiv w\qquad (1)$$

Требуется доказать, что

$$u\equiv v\qquad (2)$$

Изъ (1) слѣдуетъ, что

*) Знакъ „≡" не имѣетъ общепризнаннаго, разъ навсегда установленнаго значенія. Имъ пользуются для самыхъ разнообразныхъ цѣлей

$$\lim (u-w)=0 \quad , \quad \lim (v-w)=0$$

Но
$$u-v=(u-w)-(v-w),$$

а потому
$$\lim (u-v)=0,$$

т. е. $u \doteq v$.

ТЕОРЕМА. ПЕРЕМѢННАЯ ВЕЛИЧИНА ПРЕДѢЛЬНО-РАВНА СВОЕМУ ПРЕДѢЛУ, ЕСЛИ ОНЪ СУЩЕСТВУЕТЪ.

Потому что, если $\lim u = c$,
то $\lim (u-c)=0$ и, слѣдовательно, $u \doteq c$

Для правильнаго пониманія этой теоремы необходимо имѣть въ виду что величины могутъ быть предѣльно-равными и въ то же время не имѣть предѣла. Такъ, напр., пусть
$$y=\sin x$$
$$z=\frac{1}{x}+\sin x,$$

и пусть x безконечно возрастаетъ. Такъ какъ въ такомъ случаѣ $\sin x$ не стремится ни къ какому предѣлу, то y и z не имѣютъ предѣла. Но
$$z-y=\frac{1}{x},$$

а потому
$$\lim (z-y)=0$$

и слѣдовательно $z \doteq y$.

Такимъ образомъ, величины, будучи предѣльно-равными, могутъ не имѣть предѣла.

Но если величина имѣетъ предѣлъ, то она предѣльно-равна ему.

ТЕОРЕМА ОБЪ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ.

Строго говоря, всѣ величины, которыя Анализъ разсматриваетъ по существу конечны. Правда, мы имѣемъ два символа безконечныхъ чиселъ $+\infty$ и $-\infty$. Но не надо забывать, что эти символы вводятся исключительно только для того, чтобы характеризовать нѣкоторые процессы измѣненія конечныхъ величинъ. Такъ, напр., $+\infty$ мы принимаемъ за предѣлъ безконечно возрастающей величины. Но сама безконечно возрастающая величина, въ теченіе всего процесса измѣненія принимаетъ только конечныя значенія и, слѣдовательно, всегда остается конечной величиной.

Точно также и всякая безконечно умаляющаяся величина во всякій моментъ своего измѣненія есть конечная величина.

Но въ Анализѣ очень часто терминъ „конечная величина" понимается нѣсколько въ иномъ, болѣе узкомъ, смыслѣ.

КОНЕЧНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ ВЪ ТѢСНОМЪ СМЫСЛѢ ВЪ АНАЛИЗѢ НАЗЫВАЮТЪ ВСЯКУЮ ПЕРЕМѢННУЮ ВЕЛИЧИНУ, ПРИНИМАЮЩУЮ ВЪ ПРОЦЕССѢ ИЗМѢНЕНІЯ ТОЛЬКО ТАКІЯ ЗНАЧЕНІЯ, МОДУЛЬ КОТОРЫХЪ БОЛЬШЕ НѢКОТОРАГО ОДНОГО И ТОГО ЖЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНАГО ЧИСЛА И МЕНЬШЕ НѢКОТОРАГО ДРУГОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНАГО ЧИСЛА.

Слѣдовательно, если m и M два какихъ-угодно положительныхъ числа, причемъ $m<M$, и если перемѣнная величина x можетъ принимать только такія значенія, что

$$m<|x|<M$$

то мы должны сказать, что x конечная величина.

Въ дальнѣйшемъ понятіе „конечная величина" мы будемъ понимать въ этомъ узкомъ смыслѣ. Согласно съ этимъ пониманіемъ мы уже не можемъ называть безконечно возрастающую величину конечной величиной, потому что безконечно возрастающая величина не только не остается менѣе нѣкоторой положительной величины, но, напротивъ, становится и остается болѣе всякой впередъ заданной величины.

Точно также и безконечно умаляющуюся величину мы не имѣемъ уже права называть конечной величиной, потому что модуль безконечно умаляющейся величины не только не остается болѣе нѣкоторой положительной величины, но, напротивъ, какую бы мы не взяли положительную величину m, модуль безконечно умаляющейся величины всегда становится менѣе m. Вообще согласно введенному опредѣленію, КОНЕЧНАЯ ВЕЛИЧИНА НЕ МОЖЕТЪ БЫТЬ НИ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩЕЙСЯ, НИ БЕЗКОНЕЧНО ВОЗРАСТАЮЩЕЙ.

Мы теперь докажемъ теорему, которую назовемъ теоремой объ эквивалентности, потому что, опираясь на нее очень часто можно легко и просто установить эквивалентность разсматриваемыхъ величинъ. Предварительно замѣтимъ, что безконечно умаляющіяся величины обыкновенно представляются въ видѣ произведенія

$$\beta\alpha$$

безконечно умаляющагося множителя α на нѣкоторый множитель β. Этотъ множитель мы будемъ называть <u>факторомъ.</u>

Въ иныхъ случаяхъ факторъ тоже безконечно умаляется. Но обычно онъ является <u>конечнымъ</u>, такъ что предѣлъ его не можетъ равняться ни нулю, ни безконечности.

<u>ТЕОРЕМА ОБЪ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ.</u> ЕСЛИ ВЪ ПРОИЗВЕДЕНІИ $\beta\alpha$

КОНЕЧНАГО ФАКТОРА β НА БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩІЙСЯ МНОЖИТЕЛЬ α ЗАМѢНИМЪ КОНЕЧНЫЙ ФАКТОРЪ ПРЕДѢЛЬНО РАВНОЙ ЕМУ ВЕЛИЧИНОЙ β', А БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩІЙСЯ МНОЖИТЕЛЬ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЕМУ ВЕЛИЧИНОЙ α ТО ПОЛУЧИМЪ ПРОИЗВЕДЕНІЕ

$$\beta'\alpha',$$

ЭКВИВАЛЕНТНОЕ ДАННОМУ ПРОИЗВЕДЕНІЮ.

Требуется доказать, что, если

$$\beta \equiv \beta' \quad \alpha \approx \alpha, \qquad (1)$$

то

$$\beta\alpha \approx \beta'\alpha' \qquad (2)$$

Замѣчая, что

$$\frac{\beta\alpha}{\beta\alpha} = \frac{\beta + (\beta' - \beta)}{\beta} \frac{\alpha}{\alpha}$$

имѣемъ

$$\frac{\beta\alpha}{\beta\alpha} - \left(1 + \frac{\beta - \beta}{\beta}\right)\frac{\alpha'}{\alpha} \qquad (3)$$

Изъ (1) слѣдуетъ, что

$$\lim (\beta' - \beta) = 0, \qquad \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$$

Кромѣ того, по условію, β въ предѣлѣ не обращается въ нуль Слѣдовательно

$$\lim \frac{\beta'\alpha'}{\beta\alpha} = 1,$$

и теорема доказана.

Отмѣтимъ два частныхъ случая. Такъ какъ всякая величина предѣльно равна себѣ, то имѣемъ

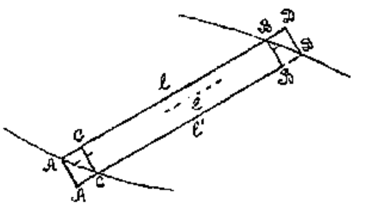
$$\beta\alpha \approx \beta\alpha$$

Принимая же во вниманіе, что $\alpha \approx \alpha$, заключаемъ, что

$$\beta\alpha \approx \beta'\alpha$$

БЕЗКОНЕЧНО ТОНКАЯ ПОЛОСА.

Пусть u площадь полосы, ограниченной двумя кривыми и двумя параллельными прямыми AB и CD, длины которыхъ соотвѣтственно обозначимъ черезъ l' и l. Пусть h разстояніе между этими прямыми. Мы будемъ называть h шириной полоски u. Если h безконечно умаляется, то площадь полоски тоже безконечно умаляется. Такую полоску, т.е. всякую полоску, шири-



на котороi безконечно умаляется, назовемъ безконечно-тонкои полоскои. Правильнѣе ее было бы называть безконечно-утончающейся Длину l всякой прямой, параллельнои бокамъ полоски, проходящеи по полоскѣ назовемъ длинои полоски. Слѣдовательно, длина безконечно-тонкои полоски не есть вполнв опредѣленная величиина. Между прочимъ l' и l могутъ быть приняты за длины разсматриваемои полоски. Въ точкахъ A, B, C, D построимъ перпендикуляры къ бокамъ полосы. Получимъ прямоугольники $CC'BB$ и $AA'DD'$ площади которыхъ обозначимъ черезъ u и u'. Имѣемъ

$$u' = h \cdot BC' \qquad u = h\, AD'$$

Если h безконечно умаляется, то геометрическя очевидно, что BC', AD', l, l и l предѣльно-равны между собои, а потому по теоремѣ объ эквивалентности,

$$u' \approx u \approx lh$$

и такъ какъ $u < u < u$, то

$$u \approx lh$$

Получаемъ теорему. площадь безконечно тонкои полоски эквивалентна произведенiю длины ея на ширину.

Слѣдовательно съ точки зрѣнiя эквивалентности площадь безконечно тонкой полоски можно разсматривать, какъ площадь прямоугольника. Этотъ результатъ вполнѣ совпадаетъ съ нашимъ грубымъ представленiемъ.

БЕЗКОНЕЧНО ТОНКIИ СЕКТОРЪ.

Пусть v - площадь сектора ACB круга радiуса r. Черезъ s обозначимъ длину дуги AB, черезъ α уголъ сектора.

Ясно, что s во столько разъ меньше длины всеи окружности, во сколько α меньше 2π.

Также очевидно, что отношенiе площади сектора къ площади круга равно отношенiю угла сектора къ полному углу. Слѣдовательно, имѣемъ

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{\alpha}{2\pi} \qquad \frac{u}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

а потому

$$s = r\alpha \quad , \qquad u = \frac{1}{2} r^2 \alpha \qquad (1)$$

Эти формулы показываютъ, что

Длина дуги окружности равна произведенiю радiуса на уголъ, стягиваемый дугою.

Площадь круговаго сектора равна половинѣ произведенія квадрата радіуса на уголъ сектора.

Изъ (1) не трудно вывести что

$$u = \frac{1}{2} r s \qquad (2)$$

Слѣдовательно, площадь круговаго сектора равна половинѣ произведенія радіуса на дугу сектора.

Мы видимъ, что формулу (2) можно истолковать такъ съ точки зрѣнія вычисленія площади круговой секторъ можно разсматривать какъ треугольникъ, высотою котораго служитъ радіусъ, основаніемъ же дуга сектора.

Перейдемъ къ такъ называемымъ кривымъ секторамъ.

Пусть PQ какая-нибудь кривая. Изъ точки O проведемъ въ точки A и B два радіуса-вектора r' и r'', уголъ между которыми пусть равенъ ω. Фигуру AOB назовемъ кривымъ секторомъ. Площадь его обозначимъ черезъ u. Если ω безконечно умаляется, то u тоже безконечно умаляется.

Всякій радіусъ-векторъ r любой точки C лежащей на кривой между точками A и B, будемъ называть безразлично радіусомъ нашего сектора.

Вычислимъ, чему эквивалентна площадь u.

Изъ O, какъ изъ центра, описываемъ дуги AB' и BA' соответственно радіусами r' и r''. Получимъ круговыя секторы AOB' и $A'OB$, площади которыхъ обозначимъ черезъ u' и u''. Геометрически очевидно, что

$$u' < u < u'' \qquad (3)$$

Кромѣ того согласно съ (1) имѣемъ

$$u' = \frac{1}{2} r'^2 \omega \qquad u'' = \frac{1}{2} r''^2 \omega \qquad (4)$$

Но геометрически ясно что, если ω безконечно умаляется то

$$r^2 \equiv r'^2 \equiv r''^2$$

Поэтому изъ (4) заключаемъ, что

$$u' \approx u'' \approx \frac{1}{2} r^2 \omega$$

Теперь изъ (3) слѣдуетъ, что

$$u \approx \frac{1}{2} r^2 \omega$$

и мы получаемъ теорему

Площадь безконечно умаляющагося кривого сектора эквивалентна половинѣ произведенія его радіуса на его уголъ.

Слѣдовательно, съ точки зрѣнія эквивалентности площадь

всякаго безконечно умаляющагося кривого сектора можно разсматривать какъ площадь кругового сектора.

ГЛАВА VII. ИНТЕГРАЛЬНЫЯ СУММЫ. ВТОРОЙ ПРИНЦИПЪ ИСЧИСЛЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИНЪ.

Къ нахожденію предѣловъ суммъ безконечно умаляющихся слагаемыхъ въ безконечно возрастающемъ числѣ приводится безчисленное множество задачъ, а именно всѣ задачи о вычисленіи площадей, длинъ, поверхностей, объемовъ и т.д Это повело къ установленію весьма широкаго понятія объ опредѣленномъ интегралѣ.*)

ОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ.

ОПРЕДѢЛЕННЫМЪ ИНТЕГРАЛОМЪ ВЪ САМОМЪ ШИРОКОМЪ СМЫСЛѢ НАЗЫВАЕТСЯ ПРЕДѢЛЪ ВСЯКОЙ СУММЫ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩИХСЯ СЛАГАЕМЫХЪ ВЪ БЕЗКОНЕЧНО ВОЗРАСТАЮЩЕМЪ ЧИСЛѢ.

ВСЯКУЮ СУММУ, ЧИСЛО СЛАГАЕМЫХЪ КОТОРОЙ БЕЗКОНЕЧНО ВОЗРАСТАЕТЪ, ВЪ ТО ВРЕМЯ КАКЪ САМИ СЛАГАЕМЫЯ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮТСЯ, НАЗЫВАЮТЪ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММОЙ

СЛѢДОВАТЕЛЬНО, ВСЯКІЙ ОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ ЕСТЬ ПРЕДѢЛЪ НѢКОТОРОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ.

ОБЫЧНО ВСЯКАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ СУММА ρ ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ ВЪ ВИДѢ СУММЫ ТИПА:

$$\rho = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 + \qquad \beta_n\alpha_n$$

Т.Е. КАЖДОЕ СЛАГАЕМОЕ ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ ВЪ ВИДѢ ПРОИЗВЕДЕНІЯ ДВУХЪ МНОЖИТЕЛЕЙ. ВЪ СВОЕЙ СОВОКУПНОСТИ ЭТИ МНОЖИТЕЛИ РАСПАДАЮТСЯ НА ДВѢ СИСТЕМЫ: НА СИСТЕМУ ВЕЛИЧИНЪ

$$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \qquad \alpha_n,$$

КОТОРЫЯ МЫ БУДЕМЪ НАЗЫВАТЬ ЭЛЕМЕНТАМИ ИНТЕГРАЦІИ, И НА СИСТЕМУ ВЕЛИЧИНЪ

$$\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \qquad \beta_n,$$

КОТОРЫЯ МЫ НАЗОВЕМЪ ФАКТОРАМИ.

ПРИ ПЕРЕХОДѢ КЪ ПРЕДѢЛУ ЧИСЛО СЛАГАЕМЫХЪ БЕЗКОНЕЧНО ВОЗРАСТАЕТЪ. ПРИ ЭТОМЪ ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЦІИ

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ \ldots\ldots \ \alpha_n$$

БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮТСЯ, БЛАГОДАРЯ ЧЕМУ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮТСЯ И ВСѢ СЛАГАЕМЫЯ ЧТО ЖЕ КАСАЕТСЯ ФАКТОРОВЪ

$$\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3, \qquad \beta_n,$$

---

*) *На содержаніе этой главы обратить особое вниманіе.*

то ХОТЯ ВЪ ИНЫХЪ СЛУЧАЯХЪ ОНИ ТОЖЕ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮТСЯ, НО ОБЫКНОВЕННО ОНИ НЕ СТРЕМЯТСЯ НИ КЪ КАКОМУ ПРЕДѢЛУ. СЛѢДОВАТЕЛЬНО, КАЖДОЕ СЛАГАЕМОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ ВЪ ВИДѢ ПРОИЗВЕДЕНІЯ ФАКТОРА НА БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩІЙСЯ ЭЛЕМЕНТЪ ИНТЕГРАЦІИ.

ЕСЛИ МЫ ЧЕРЕЗЪ α ОБОЗНАЧИМЪ ОБЩІЙ ТИПЪ ЭЛЕМЕНТА ИНТЕГРАЦІИ, А ЧЕРЕЗЪ β ОБЩІЙ ТИПЪ ФАКТОРА, ТО СЛАГАЕМЫЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ БУДУТЪ ТИПА $\beta\alpha$, А ПОТОМУ ЭТУ СУММУ МЫ МОЖЕМЪ ОБОЗНАЧИТЬ ТАКЪ:

$$\sum \beta\alpha,$$

ЧТО НАДО ЧИТАТЬ ТАКЪ СУММА СЛАГАЕМЫХЪ ТИПА $\beta\alpha$.

ВЪ ТАКОМЪ СЛУЧАѢ ПРЕДѢЛЪ ЭТОЙ СУММЫ, Т.Е. ИНТЕГРАЛЪ, ОБОЗНАЧАЕТСЯ ТАКЪ

$$\int \beta\alpha,$$

ПРИЧЕМЪ У ЗНАКА ИНТЕГРАЛА ЧАСТО ПРИПИСЫВАЮТЪ РАЗЛИЧНЫЕ СИМВОЛЫ, ИМѢЮЩІЕ ЦѢЛЬЮ БОЛѢЕ ТОЧНОЕ УКАЗАНІЕ НА УСЛОВІЯ ПОЛУЧЕНІЯ ЭТОГО ИНТЕГРАЛА.

ПРЕДѢЛЪ СУММЫ АБСОЛЮТНЫХЪ ВЕЛИЧИНЪ ЭЛЕМЕНТОВЪ ИНТЕГРАЦІИ, Т.Е ПРЕДѢЛЪ СУММЫ

$$\sum|\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + \dots \dots + |\alpha_n|$$

МЫ БУДЕМЪ НАЗЫВАТЬ ОБЛАСТЬЮ ИНТЕГРАЦІИ.

Разсмотримъ, какъ извѣстное намъ понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ подходитъ подъ только что приведенное болѣе широкое понятіе.

Мы опредѣлили опредѣленный интегралъ, какъ предѣлъ суммы

$$s = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x \qquad (1)$$

Слагаемыя этой суммы типа $f(x)\Delta x$ или типа $f(x)dx$

$$s = \sum f(x)dx.$$

Поэтому-то предѣлъ этой суммы обозначаютъ такъ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

При переходѣ къ предѣлу величины

$$f(\xi_0),\ f(\xi),\ f(\xi_2) \qquad f(\xi_{n-1})$$

не стремятся ни къ какимъ предѣламъ. Это-факторы суммы. Но величины

$$\Delta x_0,\ \Delta x\ \ \Delta x_2, \dots\dots \Delta x_{n-1}$$

безконечно умаляются. Это - элементы интеграціи. Предѣлъ суммы ихъ абсолютныхъ величинъ, т.е. предѣлъ суммы.

$$|\Delta x_0| + |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots + |\Delta x_{n-1}|$$

равный длинѣ интервала интеграціи, есть область интеграціи.

Стоитъ только положить

$$f(\xi_k)=\beta_k \qquad \Delta x_k=\alpha_k$$

чтобы ясно видѣть, что сумма s есть сумма типа

$$\sum \beta\alpha,$$

т е. интегральная сумма.

ВТОРОЙ ПРИНЦИПЪ

Этотъ принципъ имѣетъ огромное приложенiе при вычисленiи предѣловъ интегральныхъ суммъ. Онъ опирается на слѣдующую лемму

ЛЕММА. ЕСЛИ ВСѢ ФАКТОРЫ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ

$$\sum \beta\alpha=\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\dots+\beta_n\alpha_n$$

НЪ СВОЮ ОЧЕРЕДЬ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮТСЯ, И ЕСЛИ ОБЛАСТЬ ИНТЕГРАЦIИ, Т.Е. ПРЕДѢЛЪ СУММЫ $\sum|\alpha|$, КОНЕЧНА ТО ПРЕДѢЛЪ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ РАВЕНЪ НУЛЮ.

Пусть ε - наибольшiи модуль изъ модулей факторовъ β_1, β_2 .. β_n. Такъ какъ, по условiю теоремы, въ предѣлѣ всѣ факторы обращаются въ нуль, то

$$\lim \varepsilon=0.$$

Модуль суммы меньше или равенъ суммѣ модулей слагаемыхъ. Поэтому

$$\left|\sum \beta\alpha\right| \leqq |\beta_1||\alpha_1|+|\beta_2||\alpha_2|+ \qquad +|\beta_n||\alpha_n|$$

Въ правой части всѣ слагаемыя положительны. Мы ее увеличимъ, если всѣ $|\beta_k|$ замѣнимъ черезъ ε. Получимъ:

$$\left|\sum \beta\alpha\right| \leqq \varepsilon\left\{|\alpha_1|+|\alpha_2|+ \qquad +|\alpha_n|\right\},$$

или, короче,

$$\left|\sum \beta\alpha\right| \leqq \varepsilon \sum|\alpha|$$

Такъ какъ предѣлъ суммы $\sum|\alpha|$ конеченъ и такъ какъ $\lim\varepsilon=0$, то

$$\lim \sum \beta\alpha=0$$

и лемма доказана.

ТЕОРЕМА. ПРИ ВЫЧИСЛЕНIИ ПРЕДѢЛА ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ ОБЛАСТЬ ИНТЕГРАЦIИ КОТОРОЙ КОНЕЧНА МОЖНО КАЖДЫЙ ФАКТОРЪ ЕЯ ЗАМѢНЯТЬ ПРЕДѢЛЬНО РАВНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ.

Пусть имѣемъ двѣ интегральныхъ суммы

$$p=\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3+ \dots+\beta_n\alpha_n,$$

$$q=\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3+ \qquad +\gamma_n\alpha_n$$

и предположимъ, что всякiй факторъ β_k предѣльно равенъ соотвѣтствующему фактору γ_k. Это значитъ что всѣ разности

$$\beta_1-\gamma_1 \quad \beta_2-\gamma_2 \quad \beta_3-\gamma_3 \qquad \beta_n-\gamma_n$$

безконечно умаляются. Имѣемъ

$$p-q=(\beta_1-\gamma_1)\alpha_1+(\beta_2-\gamma_2)\alpha_2+(\beta_3-\gamma_3)\alpha_3+\dots\quad\dots(\beta_n-\gamma_n)\alpha_n$$

Въ правой части всѣ факторы безконечно умаляются, а потому по только что доказанной леммѣ:

$$\lim(p-q)=0$$

Слѣдовательно

$$\lim q=\lim p$$

Но сумма q получается изъ суммы p замѣною ея факторовъ β_k предѣльно равными величинами γ_k. Теорема доказана

<u>ТЕОРЕМА.</u> ПРИ ВЫЧИСЛЕНІИ ПРЕДѢЛА ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ СЪ КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТЬЮ ИНТЕГРАЦІИ КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТЪ ИНТЕГРАЦІИ МОЖНО ЗАМѢНИТЬ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЕМУ ВЕЛИЧИНОЙ

Пусть

$$p=\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3+\qquad\qquad+\beta_n\alpha_n \tag{1}$$

$$q=\beta_1\alpha_1'+\beta_2\alpha_2'+\beta_3\alpha_3'+\qquad\qquad+\beta_n\alpha_n', \tag{2}$$

причемъ, при всякомъ k $\alpha_k'\approx\alpha_k$ и слѣдовательно

$$\lim\frac{\alpha_k'}{\alpha_k}=1 \tag{3}$$

Требуется доказать, что $\lim p=\lim q$. Для этого перепишемъ q такъ:

$$q=\left(\beta_1\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\right)\alpha_1+\left(\beta_2\frac{\alpha_2'}{\alpha_2}\right)\alpha_2+\qquad\qquad+\left(\beta_n\frac{\alpha_n'}{\alpha_n}\right)\alpha_n \tag{4}$$

Легко видѣть, что факторы этой суммы соотвѣтственно предѣльно равны факторамъ суммы (1) Въ самомъ дѣлѣ:

$$\beta_k\frac{\alpha_k'}{\alpha_k}-\beta_k=\beta_k\left(\frac{\alpha_k'}{\alpha_k}-1\right)$$

Принимая во вниманіе (3), заключаемъ, что

$$\lim\left(\beta_k\frac{\alpha_k'}{\alpha_k}-\beta_k\right)=0$$

и слѣдовательно

$$\beta_k\frac{\alpha_k'}{\alpha_k}\equiv\beta_k$$

Но если въ (1) и (4) факторы предѣльно-равны, то, по предыдущей теоремѣ, $\lim p=\lim q$ Теорема доказана

Соединяя эту теорему съ предыдущей въ одну, получаемъ теорему, которую назовемъ вторымъ принципомъ исчисленія безконечно умаляющихся.

<u>ВТОРОЙ ПРИНЦИПЪ.</u> ПРИ ВЫЧИСЛЕНІИ ПРЕДѢЛА ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ СЪ КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТЬЮ ИНТЕГРАЦІИ МОЖНО ЗАМѢНЯТЬ КАЖДЫЙ ФАКТОРЪ

ПРЕДѢЛЬНО РАВНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ А КАЖДЫЙ ЭЛЕМЕНТЪ ИНТЕГРАЦІИ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЕМУ ВЕЛИЧИНОЙ.

Можно сказать, что только благодаря этому принципу возможны всѣ безчисленныя приложенія Анализа къ геометріи, механикѣ и физикѣ.

Какъ частный случай доказаннаго принципа, отмѣтимъ тотъ случай, когда всѣ факторы въ интегральной суммѣ

$$\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3+\ldots\ldots+\beta_n\alpha_n$$

равны единицѣ а всѣ элементы положительны. Тогда получаемъ теорему:

ПРИ ВЫЧИСЛЕНІИ ПРЕДѢЛА СУММЫ

$$\sum\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\qquad\qquad+\alpha_n$$

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХЪ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩИХСЯ СЛАГАЕМЫХЪ ВЪ БЕЗКОНЕЧНО ВОЗРАСТАЮЩЕМЪ ЧИСЛѢ КАЖДОЕ СЛАГАЕМОЕ МОЖНО ЗАМѢНЯТЬ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЕЙ ВЕЛИЧИНОЙ.

Въ большинствѣ курсовъ подъ вторымъ принципомъ исчисленія безконечно умаляющихся разумѣютъ какъ разъ только эту теорему

Какъ примѣръ доказаннаго принципа разсмотримъ слѣдующую задачу. Пусть

$$S=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\qquad\qquad+\sin\frac{n-1}{n^2}+\sin\frac{n}{n^2}$$

гдѣ n-цѣлое число. Слагаемое стоящее на k мѣстѣ, будетъ

$$x_k=\sin\frac{k}{n^2}$$

и ясно что наибольшимъ слагаемымъ будетъ послѣднее, равно $\sin\frac{1}{n}$. Положимъ, что n безконечно возрастаетъ, и что требуется найти предѣлъ суммы S

Очевидно, что при безконечномъ возрастаніи n число слагаемыхъ, равное n тоже безконечно возрастаетъ, въ то же время каждое слагаемое безконечно умаляется. Но синусъ безконечно умаляющейся дуги эквивалентенъ самой дугѣ Слѣдовательно, при вычисленіи предѣла суммы S мы имѣемъ право замѣнить каждый синусъ его аргументомъ, а потому

$$\lim S=\lim\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\qquad+\frac{n}{n^2}\right]=\lim\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n^2}\right\}$$

Слѣдовательно

$$\lim S=\frac{1}{2},$$

и мы рѣшили однимъ почеркомъ задачу, которую рѣшить инымъ путемъ было бы затруднительно

ДИФФЕРЕНЦІАЛЪ ФУНКЦІИ.

Если $y = f(x)$, то

$$dy = f'(x)\,dx \qquad (1)$$

гдѣ dx обозначаетъ произвольное приращенıе независимаго перемѣннаго x.

Изъ равенства (1) ясно видно, что дифференціалъ функціи есть функція двухъ перемѣнныхъ x и dx, которыя мы можемъ измѣнять независимо другъ отъ друга.

Если мы заставимъ приращеніе dx безконечно умаляться, то очевидно, что въ такомъ случаѣ и дифференціалъ функціи становится тоже безконечно умаляющейся величиной.

ВЪ ДАЛЬНѢЙШЕМЪ МЫ ПОЧТИ ПОСТОЯННО БУДЕМЪ РАЗСМАТРИВАТЬ ДИФФЕРЕНЦІАЛЫ НЕЗАВИСИМЫХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ, А, СЛѢДОВАТЕЛЬНО, И ДИФФЕРЕНЦІАЛЫ ФУНКЦІИ, КАКЪ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩІЯСЯ ВЕЛИЧИНЫ.

Причина этого заключается въ слѣдующемъ если приращенıе независимаго перемѣннаго безконечно умаляется, то безконечно умаляется и приращеніе функціи. Какъ извѣстно

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Раздѣляя обѣ части равенства на $f'(x)$, получаемъ

$$\lim \frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} = 1$$

и слѣдовательно

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x,$$

т.е. $\Delta y \approx dy$. Имѣемъ теорему необычайной важности

БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩЕЕСЯ ПРИРАЩЕНІЕ ФУНКЦІИ ЭКВИВАЛЕНТНО ДИФФЕРЕНЦІАЛУ ФУНКЦІИ.

Вотъ почему имѣетъ такое значенıе понятıе о дифференцıалѣ при вычисленіи предѣловъ отношеній безконечно умаляющихся, а также при вычисленіи предѣловъ суммъ безконечно умаляющихся слагаемыхъ въ безконечно возрастающемъ числѣ, мы, опираясь на первый и второй принципы, имѣемъ право замѣнять безконечно умаляющіяся приращенıя функціи ихъ дифференціалами.

Это свойство дифференціала исторически и было одною изъ главнѣйшихъ причинъ введенія понятія о немъ въ науку.

ПРОСТОЙ ОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ.

Опредѣленнымъ интеграломъ, какъ было сказано, вообще назы-

вается предѣлъ всякой суммы безконечно умаляющихся слагаемыхъ въ безконечно возрастающемъ числѣ, т.е. предѣлъ всякой интегральной суммы.

Въ дальнѣйшемъ мы встрѣтимся съ примѣрами самыхъ разнообразныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Тотъ же типъ опредѣленныхъ интеграловъ, съ которымъ мы уже знакомы, т.е. опредѣленный интегралъ, который обозначается такъ

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

очень часто, для отличія отъ другихъ типовъ, называютъ простымъ опредѣленнымъ интеграломъ или обыкновеннымъ, или опредѣленнымъ интеграломъ отъ функціи одного перемѣннаго.

Но въ большинствѣ случаевъ какъ разъ интегралы этого типа называютъ коротко опредѣленными интегралами, безъ всякаго добавочнаго прилагательнаго; чаще же всего ихъ называютъ просто интегралами. Что же касается интеграловъ иныхъ типовъ, то для нихъ, въ отличіе отъ изученныхъ нами, вводятъ различные термины

Вычисленіе интеграловъ самыхъ разнообразныхъ типовъ приводится въ концѣ концовъ къ вычисленію изученныхъ нами обыкновенныхъ интеграловъ. Поэтому теорія ихъ пріобрѣтаетъ огромное значенія для всей математики.

Мы разсмотримъ еще разъ нѣкоторыя ихъ основныя свойства, съ цѣлью выяснить ту роль, которую въ ихъ теоріи играетъ понятіе объ эквивалентныхъ величинахъ Благодаря тому пути который былъ нами избранъ для введенія понятія объ опредѣленномъ интегралѣ, эта роль до сихъ поръ оставалась въ тѣни.

Опредѣленный интегралъ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

мы опредѣлили какъ предѣлъ слѣдующей суммы

$$S = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_k)\Delta x_k + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} \quad (1)$$

причемъ, при переходѣ къ предѣлу, предполагается, что число промежуточныхъ чиселъ x_k безконечно возрастаетъ такъ, что промежутки между ними безконечно умаляются.

Этотъ предѣлъ, какъ мы видѣли, не зависитъ отъ выбора чиселъ ξ_k и въ свое время мы убѣдились въ этомъ, исходя изъ чисто геометрическихъ соображеній. Но теперь не трудно видѣть, что это есть простое слѣдствіе второго принципа.

Въ самомъ дѣлѣ рядомъ съ суммою S разсмотримъ другую сумму

съ инымъ выборомъ чиселъ ξ_k. Пусть

$$s' = f(\xi'_0)\Delta x_0 + f(\xi'_1)\Delta x_1 + f(\xi'_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi'_k)\Delta x_k + \dots + f(\xi'_n)\Delta x_n \quad (2)$$

Множители $f(\xi_k)$ и $f(\xi'_k)$ являются факторами въ суммахъ S и S'. Разсмотримъ ихъ разность

$$f(\xi_k) - f(\xi'_k). \quad (3)$$

Такъ какъ числа ξ_k и ξ'_k лежатъ въ одномъ и томъ же интервалѣ (x_k, x_{k+1}) и такъ какъ этотъ интервалъ въ предѣлѣ обращается въ нуль, то, слѣдовательно, и разность

$$\xi_k - \xi'_k$$

въ предѣлѣ равна нулю, а потому и разность (3) имѣетъ предѣломъ нуль. Иными словами это значитъ, что величины $f(\xi_k)$ и $f(\xi'_k)$ предѣльно равны.

Но если факторы суммъ S и S' предѣльно-равны, то, согласно второму принципу, суммы S и S' имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ, т.е. предѣлъ суммы не зависитъ отъ выбора чиселъ ξ_k.

Мы видимъ, что эта независимость есть не что иное какъ простое приложенiе второго принципа, согласно которому предѣлъ интегральной суммы не измѣнится, если всѣ факторы ея мы замѣнимъ предѣльно-равными имъ величинами.

Такъ какъ совершенно безразлично, какъ выбирать числа ξ_k, то мы можемъ сказать, что слагаемыя суммы S есть слагаемыя типа

$$f(x)\Delta x,$$

а потому и пишемъ основное равенство

$$\lim \sum_a^b f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

ГЛАВА VIII. ГЕОМЕТРИЧЕСКIЯ ПРИЛОЖЕНIЯ ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА.

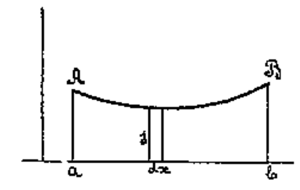
Въ этой главѣ мы разсмотримъ нѣкоторыя приложенiя опредѣленныхъ интеграловъ къ вычисленiю площадей, длинъ и объемовъ.

ПЛОЩАДЬ ВЪ ДЕКАРТОВЫХЪ ПРЯМОУГОЛЬНЫХЪ КООРДИНАТАХЪ

Эту задачу мы уже изслѣдовали. Здѣсь мы снова разсмотримъ ее съ точки зрѣнiя эквивалентности.

Пусть трапецiя ограничена сверху кривой, уравненiе которой

$$y = f(x)$$



Дѣлимъ трапецію на элементарныя полосы. На черт. изображена одна такая полоса, площадь которой обозначимъ черезъ p. Ширина этой произвольно взятой полосы равна dx, высота ея равна $f(x)$.

Площадь всей трапеціи равна суммѣ площадей всѣхъ полосъ. Если мы предположимъ, что число полосъ безконечно возрастаетъ такъ, что основанія ихъ безконечно умаляются, то площадь трапеціи будетъ равняться суммѣ безконечно умаляющихся слагаемыхъ въ безконечно возрастающемъ числѣ. Согласно второму принципу, мы можемъ каждое безконечно умаляющееся слагаемое замѣнить эквивалентной величиной. Мы видѣли, что

$$p \approx y\,dx$$

Поэтому, если u площадь трапеціи, то

$$u = \lim \sum_a^b y\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,dx$$

Слѣдовательно

$$u = \int_a^b y\,dx \qquad (1)$$

гдѣ y функція x.

Если теперь кривая дана параметрически уравненіями

$$x = \varphi(t)\ ,\quad y = \psi(t)$$

то, дѣлая въ (1) подстановку $x = \varphi(t)$, найдемъ, что

$$u = \int_{t_0}^{t} y\,dx, \qquad (2)$$

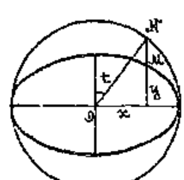
гдѣ y и x должно разсматривать, какъ функціи t. Предѣлами интеграла служатъ значенія параметра въ начальной и конечной точкѣ кривой.

Мы видѣли, что, если кривая частью лежитъ выше оси x, частью ниже, то равенство (2) всегда даетъ намъ площадь, пробѣгаемую ординатой кривой, но это при условіи считать площадь отрицательной, если она пробѣгается отрицательной ординатой въ положительномъ направленіи, или положительной ординатой въ отрицательномъ направленіи.

ПЛОЩАДЬ ЭЛЛИПСА.

Обозначимъ черезъ u площадь эллипса, уравненіе котораго

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Для верхнеи половины эллипса

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

и, чтобы получать всю верхнюю половину эллипса, надо измѣнять x отъ $-a$ до $+a$. Поэтому имѣемъ

$$\frac{1}{2}u = \frac{b}{a}\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Вычисляемъ неопредѣленный интегралъ. Интегрируя сначала по частямъ, послѣдовательно находимъ:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

а потому

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

Теперь легко наидемъ, что $u = \pi ab$.

Нѣсколько быстрѣе можно вычислить площадь эллипса, если представить его уравненіемъ въ параметрической формѣ.

Строимъ на большей оси эллипса, какъ на діаметрѣ, окружность. Пусть N точка пересѣченія этои окружности съ ординатои произвольно взятои точки M на эллипсѣ. Обозначимъ черезъ t уголъ между осью ординатъ и прямои ON. Какъ извѣстно изъ аналитическои геометріи,

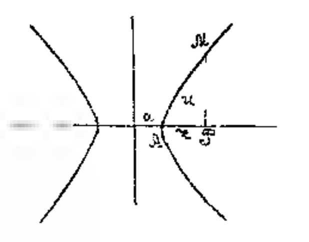
$$x = a\sin t \qquad y = b\cos t$$

и, чтобы получить верхнюю половину эллипса, надо измѣнять t отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$u = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} y\,dx = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \pi ab$$

Полагая $b = a$, получимъ площадь круга

ПЛОЩАДЬ ГИПЕРБОЛЫ



Пусть M какая-нибудь точка съ абсциссой x, лежащая въ нормальномъ координатномъ углу на гиперболѣ, уравненіе которои

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Обозначимъ черезъ u площадь фигуры APM, гдѣ PM – ордината точки M. Имѣемъ

$$u = \int_a^x y\,dx - \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$$

Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} - \int\sqrt{x^2-a^2}$$

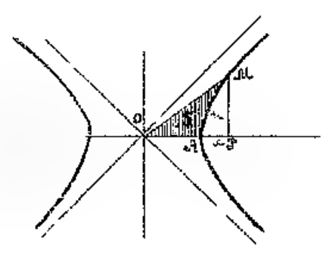
а потому

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\lg(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$$

Слѣдовательно

$$u = \frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a} - \frac{a^2}{2}\lg\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} \qquad (1)$$

Приложимъ эту формулу къ равносторонней гиперболѣ уравненіе которой



$$x^2 - y^2 = 1 \qquad (2)$$

Имѣемъ

$$u = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\lg(x+\sqrt{x^2-1})$$

Принимая же во вниманіе (2), получаемъ

$$u = \frac{xy}{2} - \frac{1}{2}\lg(x+\sqrt{x^2-1}) \qquad (3)$$

Но $\frac{1}{2}xy$ есть площадь треугольника OPM. Поэтому, если черезъ s обозначимъ площадь фигуры OAM, то не трудно видѣть, что

$$s = \frac{1}{2}\lg(x+\sqrt{x^2-1}) \qquad (4)$$

Выразимъ x черезъ s. Прежде всего имѣемъ

$$x + \sqrt{x^2-1} = e^{2s} \qquad (5)$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = e^{-2s}$$

Освобождая лѣвую часть отъ радикала въ знаменателѣ, получаемъ:

$$x - \sqrt{x^2-1} = e^{-2s} \qquad (6)$$

Изъ (5) и (6) имѣемъ:

$$x = \frac{e^{+2s}+e^{-2s}}{2} \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{e^{+2s}-e^{-2s}}{2}$$

и такъ какъ изъ (2) $y=\sqrt{x^2-1}$, то

$$x = \frac{e^{2s}+e^{-2s}}{2} \qquad y = \frac{e^{2s}-e^{-2s}}{2} \qquad (7)$$

Какъ извѣстно гиперболическими синусомъ и косинусомъ называются слѣдующія функціи:

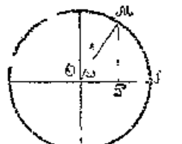
$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

поэтому равенства (7) можно переписать въ такомъ видѣ

$$x = \cosh(2s) \qquad y = \sinh(2s) \qquad (8)$$

Эти равенства даютъ геометрическое изображеніе для гиперболическихъ синуса и косинуса. Эта ихъ связь съ гиперболой и послужила причиной ихъ названія.

Построимъ около начала координатъ кругъ радіуса единицы.



Пусть радіусъ OM наклоненъ подъ угломъ ω къ оси x. Для координатъ точки M имѣемъ

$$x = \cos\omega \qquad y = \sin\omega \qquad (9)$$

Обозначимъ черезъ s площадь сектора AOM. Такъ какъ радіусъ круга равенъ единицѣ, то

$$s = \frac{1}{2}\omega \qquad \omega = 2s,$$

а потому имѣемъ

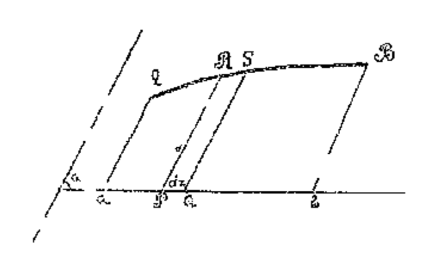
$$x = \cos(2s) \qquad y = \sin(2s). \qquad (10)$$

Мы видимъ между равенствами (8) и (10) любопытную аналогію. Въ томъ и другомъ равенствѣ s площадь нѣкотораго сектора.

ПЛОЩАДЬ ВЪ КОСОУГОЛЬНЫХЪ КООРДИНАТАХЪ.

Пусть имѣемъ косоугольную систему осей координатъ и пусть требуется вычислить площадь u фигуры $aABb$, ограниченной сверху кривой AB, уравненіе которой

$$y = f(x),$$



слѣва же и справа ординатами aA и bB крайнихъ точекъ кривой.

Мы дѣлимъ площадь трапеціи на элементарныя полосы прямыми, параллельными оси ординатъ. Если мы предположимъ, что число полосъ безконечно возрастаетъ такъ, что всѣ полосы безконечно умаляются, то въ такомъ случаѣ какъ извѣстно площадь всякой безконечно тонкой полоски $PQRS$ эквивалентна площади параллелограмма, стороны котораго y и Δx. Слѣдовательно эта площадь эквивалентна

$$y \sin\omega \, \Delta x$$

гдѣ ω уголъ между осями координатъ а потому

$$u = \lim \sum_a^b \sin\omega\, y\, \Delta x = \sin\omega \lim \sum_a^b f x\, \Delta x$$

т.е

$$u = \sin\omega \int_a^b f(x)dx$$

Имѣемъ теорему: площадь кривой трапеціи въ косоугольной системѣ координатъ выражается формулой:

$$u = \sin\omega \int_a^b y\,dx$$

Очевидно, что, если x и y даны какъ функціи параметра t, то

$$u = \sin\omega \int_{t_0}^{t} y\,dx$$

Примѣръ Пусть

$$xy = m$$

уравненіе гиперболы, отнесенной къ своимъ ассимптотамъ, какъ къ осямъ координатъ. Если изъ двухъ точекъ ея A и B абсциссы которыхъ a и b, проведемъ ординаты Aa и Bb, то для площади u фигуры $aABb$ имѣемъ:

$$u = \sin\omega \int_a^b y\,dx = \sin\omega \int_a^b \frac{m\,dx}{x} = m \sin\omega \lg\frac{b}{a},$$

гдѣ ω уголъ между ассимптотами.

ПЛОЩАДЬ ВЪ ПОЛЯРНЫХЪ КООРДИНАТАХЪ.

Какая бы намъ ни была дана площадь, какими бы кривыми она ни была ограничена, мы всегда можемъ разбить ее на сумму нѣсколькихъ криволинейныхъ трапецій. Поэтому, разъ мы умѣемъ вычислять площади криволинейныхъ трапецій, то разсуждая теоретически, тѣмъ самымъ мы можемъ вычислить площадь любой фигуры. Но легко видѣть, что насколько это справедливо теоретически, на столько это не всегда осуществимо фактически. Въ самомъ дѣлѣ, формулы для вычисленія криволинейной трапеціи были нами выведены въ предположеніи, что кривая отнесена къ декартовой системѣ осей координатъ. Но, какъ хорошо извѣстно, уравненіе кривой принимаетъ болѣе или менѣе простой или сложный видъ въ зависимости отъ выбора системы координатъ, и обычно, насколько просто бываетъ уравненіе кривой при какой-нибудь одной вполнѣ опредѣленной системѣ координатъ, настолько она принимаетъ сложную форму при другой системѣ. Между прочимъ, очень многія кривыя

уравненія которыхъ чрезвычайно просты въ полярныхъ координатахъ, напротивъ въ Декартовыхъ координатахъ представляются уравненіями весьма сложной структуры. Естественно поэтому поставить слѣдующую задачу: найти формулу для вычисленія площадей ограниченныхъ кривыми, уравненія которыхъ даны въ полярныхъ координатахъ.

Когда кривая отнесена къ Декартовымъ координатамъ, то криволинейная трапеція естественно является основнымъ типомъ, къ которому приводятся всѣ остальные типы. Но площадь трапеціи не удобна въ случаѣ полярныхъ координатъ При этой системѣ координатъ оказывается цѣлесообразнѣе за основной типъ принять площадь фигуры, которую мы назовемъ кривымъ секторомъ

Будемъ черезъ r и ω обозначать полярныя координаты точки и пусть

$$r = f(\omega)$$

уравненіе данной кривой мы предположимъ, что эта кривая пересѣкается всякимъ радіусомъ-векторомъ только въ одной точкѣ, т.е. предположимъ, что r однозначная функція ω . Обозначимъ черезъ A и B начальную и конечную точки кривой и пусть (r_0, ω), (R , Ω) полярныя координаты ихъ. Слѣдовательно

$$r_0 = f(\omega_0), \quad R = f(\Omega)$$

Если мы соединимъ точки A и B прямыми съ полюсомъ O , то получимъ фигуру AOB , ограниченную съ двухъ сторонъ отрѣзками прямыхъ OA и OB , а съ третьей стороны данной кривой AB Эту фигуру мы назовемъ кривымъ секторомъ и обозначимъ черезъ S его площадь

Для вычисленія этой площади мы поступимъ совершенно аналогично тому, какъ поступали при вычисленіи криволинейной трапеціи Начинаемъ съ того, что между точками A и B вставляемъ произвольный рядъ точекъ M , M_2, M_3, ... M_{n-1}, число которыхъ потомъ будемъ безконечно увеличивать такъ чтобы разстоянія между ними безконечно умалялись Всѣ эти промежуточныя точки соединяемъ прямыми съ полюсомъ O благодаря чему данная площадь AOB разобьется на части, которыя мы назовемъ элементарными секторіальными полосами Одновременно съ безконечнымъ возрастаніемъ точекъ M будетъ безконечно возрастать и число секторіальныхъ полосъ, причемъ площади ихъ будутъ безконечно умаляться Предѣлъ суммы всѣхъ этихъ элементарныхъ полосъ даетъ площадь сек-

тора AOB .

Обозначимъ черезъ

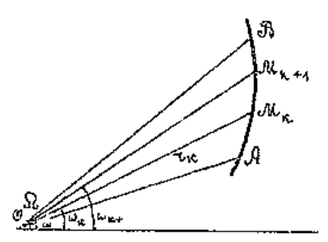
$$\omega \quad \omega_2, \omega_3 \qquad \omega_{n-1}$$

полярные углы точекъ M, M_2 M_3 M_{n-1} Пусть

$$r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_{n-1}$$

будутъ ихъ радіусы-векторы. Слѣдовательно, вообще

$$r_k = f(\omega_k)$$



Площадь безконечно малаго сектора $M_k O M_{k+1}$ эквивалентна

$$\frac{1}{2} r_k^2 \Delta \omega_k,$$

а потому

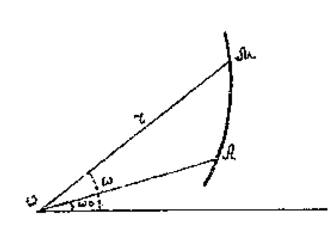
$$u = \lim \sum_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} r_k^2 \Delta \omega_k = \lim \sum_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega_k)^2 \Delta \omega_k = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} f(\omega)^2 d\omega$$

Получаемъ теорему: ПЛОЩАДЬ КРИВОГО СЕКТОРА ВЪ ПОЛЯРНЫХЪ КООРДИНАТАХЪ ВЫРАЖАЕТСЯ ФОРМУЛОЙ:

$$u = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\Omega} r^2 d\omega$$

ГДѢ ω_0 И Ω ПОЛЯРНЫЕ УГЛЫ КРАЙНИХЪ РАДІУСОВЪ-ВЕКТОРОВЪ СЕКТОРА.

Очевидно, что если данная площадь u ограничена замкнутымъ контуромъ около полюса, то надо принять



$$\Omega = \omega_0 + 2\pi,$$

гдѣ ω_0 полярный уголъ произвольно выбранной точки A на данномъ контурѣ.

Выведемъ такъ называемый дифференціалъ площади въ полярныхъ координатахъ. Пусть M перемѣнная точка на данной кривой и пусть r и ω ея полярныя координаты. Если теперь черезъ u обозначимъ площадь сектора AOM то по доказанному

$$u = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\omega} r^2 d\omega$$

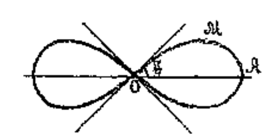
а потому

$$du = \frac{1}{2} r^2 d\omega$$

Это равенство даетъ такъ называемый дифференціалъ площади въ полярныхъ координатахъ

Какъ примѣръ, вычислимъ площадь u части OAN лемнискаты Бернулли, уравненіе которой

$$r = a\sqrt{2\cos 2\omega}$$



Имѣемъ

$$u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2d\omega=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\omega\, d\omega=\frac{a^2}{2}$$

Слѣдовательно, площадь всей петли равна a^2

ДЛИНА КРИВОЙ ЛИНІИ

При измѣреніи отрѣзковъ прямыхъ линій мы опираемся на принципъ наложенія, а именно, выбравъ такъ называемую единицу мѣры, мы смотримъ, сколько и какихъ частей ея уложится въ измѣряемомъ отрѣзкѣ прямой.

Но если мы тотъ же принципъ пожелаемъ приложить къ измѣренію длины кривыхъ линій, то мы встрѣчаемся съ непреодолимымъ затрудненіемъ, потому что всякій отрѣзокъ прямой, хотя и можетъ имѣть съ дугой кривой линіей одну или нѣсколько общихъ точекъ но никогда не можетъ совпадать съ нею всѣми точками. Слѣдовательно, по существу, никакая дуга кривой не можетъ быть измѣрена никакимъ отрѣзкомъ прямой, потому что такое измѣреніе предполагаетъ возможность наложенія. Чтобы преодолѣть это затрудненіе, мы предварительно должны дать такое опредѣленіе для длины кривыхъ линіи, которое дало бы возможность сравнивать отрѣзки прямыхъ съ дугами кривыхъ, не прибѣгая къ методу наложенія. Такое опредѣленіе напрашивается само собой. Если намъ дана какая-нибудь кривая линія, то мы можемъ вписать въ нее ломанную линію. При этомъ, чѣмъ меньше звенья ломанной линіи, тѣмъ меньше въ нашемъ представленіи эта ломанная линія отличается отъ той кривой, въ которую она вписана. Поэтому естественно опредѣлить длину кривой, какъ предѣлъ длины вписанной въ нее ломанной линіи, въ предположеніи, что число сторонъ ея безконечно возрастаетъ такъ, что всѣ звенья безконечно умаляются. Однако очевидно, что это опредѣленіе будетъ имѣть смыслъ только тогда когда предварительно мы докажемъ, что длина ломанной линіи всегда имѣетъ одинъ и тотъ же предѣлъ, по какому бы закону не возрастало число ея звеньевъ, лишь бы они безконечно умалялись. Опираясь на свойства опредѣленнаго интеграла, это доказать не трудно. Мало того, какъ увидимъ, это доказательство въ то же время намъ даетъ и формулу для вычисленія длины дугъ кривыхъ линій

Пусть намъ дана кривая AB уравненія которой

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t)$$

причемъ начальной и конечной точкамъ ея соотвѣтствуютъ значенія

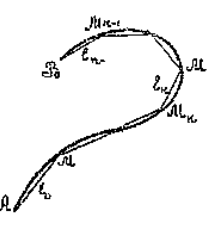
параметра $t_0 < T$. Будемъ предполагать, что $t_0 < T$.

Между точками A и B вставляемъ рядъ промежуточныхъ точекъ M, M_2, M_3, ..M_{n-1}, которыя соединяемъ другъ за другомъ хордами. Если черезъ l_k обозначимъ длину хорды, соединяющей точку M_k съ точкой M_{k+1}, то это будутъ хорды l_0, l_1, l_2 ... l_{n-1}. Въ совокупности онѣ образуютъ ломанную линію, вписанную въ данную кривую. Пусть P длина ея периметра.

Обозначимъ черезъ x_k и y_k координаты точки M_k черезъ t_k соотвѣтствующее значенiе параметра. Слѣдовательно

$$x_k = \varphi(t_k), \quad y_k = \psi(t_k).$$

По формулѣ аналитической геометрiи мы имѣемъ.



$$l_k = \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2} = \sqrt{[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2+[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)]^2}$$

Но, по теоремѣ Лагранжа,

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = (t_{k+1}-t_k)\,\varphi'(\tau'_k)$$

$$\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = (t_{k+1}-t_k)\,\psi'(\tau''_k),$$

гдѣ τ'_k и τ''_k неизвѣстныя намъ величины, промежуточныя между t_k и t_{k+1}. Принимая же во вниманiе, что всѣ разности $t_{k+1}-t_k$ положительны, потому что $t < T$, мы имѣемъ

$$l_k = \sqrt{\varphi'(\tau'_k)^2 + \psi'(\tau''_k)^2}\,(t_{k+1}-t_k),$$

и слѣдовательно

$$P = \sum l_k = \sum_t^T \sqrt{\varphi'(\tau'_k)^2+\psi'(\tau''_k)^2}\;\Delta t_k \qquad (1)$$

Периметръ ломанной вычисленъ. Предположимъ теперь, что число звеньевъ ея безконечно возрастаетъ такъ, что каждое звено безконечно умаляется. Это значитъ, что мы безконечно увеличиваемъ число чиселъ t_k, промежуточныхъ между t_0 и T, притомъ увеличиваемъ такъ, что наибольшiй промежутокъ между ними безконечно умаляется. Въ такомъ случаѣ очевидно, что сумма P есть интегральная сумма типа

$$\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3+\dots\dots+\beta_n\alpha_n$$

Это становится вполнѣ яснымъ, если мы положимъ:

$$\alpha_k = \Delta t_k \qquad \beta_k = \sqrt{\varphi'(\tau'_k)^2+\psi'(\tau''_k)^2}$$

Слѣдовательно, при вычисленiи предѣла этой суммы, мы можемъ каждый факторъ ея β_k замѣнить предѣльно-равной ему величиной.

Пусть τ_k произвольно взятая величина въ промежуткѣ (t_k, t_{k+1}), и пусть

$$\gamma_k = \sqrt{\varphi'(\tau_k)^2 + \psi'(\tau_k)^2}.$$

Разность $\beta_k - \gamma_k$, т.е. разность

$$\sqrt{\varphi'(\tau'_k)^2 + \psi'(\tau''_k)^2} - \sqrt{\varphi'(\tau_k)^2 + \psi'(\tau_k)^2}$$

очевидно, въ предѣлѣ равна нулю, потому что числа τ_k τ_k, τ_c лежатъ въ одномъ и томъ же интервалѣ (t_k, t_{k+1}), длина котораго въ предѣлѣ равна нулю. Слѣдовательно, γ_k предѣльно-равно β_k. Замѣняя же въ (1) каждый факторъ предѣльно-равной ему величиной, мы заключаемъ, что

$$\lim \mathcal{P} = \lim \sum_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi(\tau_k)^2 + \psi(\tau_k)^2}\ \Delta\tau_k$$

и слѣдовательно

$$\lim \mathcal{P} = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi(t)^2 + \psi(t)^2}\, dt \qquad (2)$$

Такимъ образомъ оказывается, что величина $\mathcal{P}$ имѣетъ единственный вполнѣ опредѣленный предѣлъ. Замѣтивъ это, мы теперь можемъ ввести слѣдующее опредѣленіе:

ТАКЪ КАКЪ, ПРИ БЕЗКОНЕЧНОМЪ УВЕЛИЧЕНІИ ЧИСЛА ЗВЕНЬЕВЪ ЛОМАННОЙ ЛИНІИ, ВПИСАННОЙ ВЪ ДАННУЮ КРИВУЮ, ПЕРИМЕТРЪ ЕЯ СТРЕМИТСЯ КЪ ЕДИНСТВЕННОМУ ВПОЛНѢ ОПРЕДѢЛЕННОМУ ПРЕДѢЛУ, ВЕЛИЧИНА КОТОРАГО НЕ ЗАВИСИТЪ ОТЪ ТОГО ЗАКОНА, ПО КАКОМУ ВОЗРАСТАЕТЪ ЧИСЛО ЗВЕНЬЕВЪ, ЛИШЬ БЫ ТОЛЬКО КАЖДОЕ ИЗЪ НИХЪ ВЪ ПРЕДѢЛѢ ОБРАЩАЛОСЬ ВЪ НУЛЬ, ТО ЭТОТЪ ПРЕДѢЛЪ ПЕРИМЕТРА УСЛОВИМСЯ НАЗЫВАТЬ ДЛИНОЮ КРИВОЙ.

Согласно этому опредѣленію, если мы черезъ S обозначимъ длину дуги AB, то изъ (2) слѣдуетъ, что

$$S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt \qquad (3)$$

Замѣчая же, что

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt$$

мы получаемъ теорему:

ЕСЛИ КРИВАЯ ДАНА ПАРАМЕТРИЧЕСКИ, И ЕСЛИ S ДЛИНА ЕЯ ДУГИ, КОТОРУЮ МЫ ПОЛУЧИМЪ, ИЗМѢНЯЯ ПАРАМЕТРЪ ОТЪ t_0 ДО T, ТО, ПРИ УСЛОВІИ, ЧТО $t_0 < T$

$$S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ГДѢ x И y ФУНКЦІИ ПАРАМЕТРА

Отмѣтимъ частный случай. Если кривая дана уравненіемъ $y = f(x)$, такъ что параметромъ служитъ x и если S длина дуги, которую получимъ, измѣняя x отъ x_0 до X, то, какъ легко видѣть,

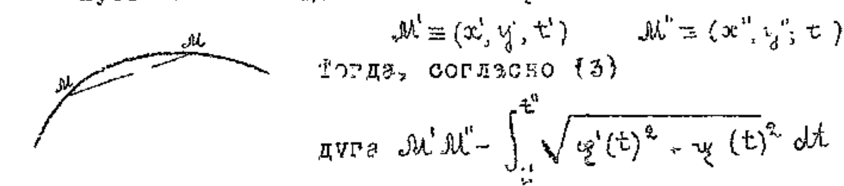
$$S = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

гдѣ y' производная отъ y по x .

Опираясь на полученный результатъ, мы можемъ доказать слѣдующую теорему:

ПРЕДѢЛЪ ОТНОШЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩЕЙСЯ ДУГИ КЪ ЕЯ ХОРДѢ РАВЕНЪ ЕДИНИЦѢ

Пусть M' и M'' двѣ точки на кривой



$$M' \equiv (x', y', t') \qquad M'' \equiv (x'', y''; t'')$$

Тогда, согласно (3)

$$\text{дуга } M'M'' = \int_{t'}^{t''} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$

Примѣняя же теорему о среднемъ значеніи интеграла, имѣемъ:

$$\text{дуга } M'M'' = (t'' - t')\sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2}$$

гдѣ τ нѣкоторое число, промежуточное между t'' и t' . Вычисляемъ длину хорды $M'M''$ Примѣняя теорему Лагранжа, послѣдовательно находимъ:

$$\text{хорда } M'M'' = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

$$= \sqrt{[\varphi(t'') - \varphi(t')]^2 + [\psi(t'') - \psi(t')]^2} = (t'' - t')\sqrt{\varphi'(\tau')^2 + \psi'(\tau'')^2},$$

гдѣ τ' и τ'' лежатъ въ интервалѣ (t' , t''). Слѣдовательно

$$\frac{\text{дуга } M'M''}{\text{хорда } M'M''} = \frac{\sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2}}{\sqrt{\varphi'(\tau')^2 + \psi'(\tau'')^2}}$$

Переходимъ къ предѣлу, предполагая что M'' безконечно приближается къ M'. Въ предѣлѣ всѣ величины t'' , τ , τ' , τ'' равны t' , а потому

$$\lim \frac{\text{дуга}}{\text{хорда}} = 1$$

Слѣдовательно, всякая безконечно умаляющаяся дуга эквивалентна своей хордѣ.

Введемъ теперь дифференціалъ дуги. Возьмемъ на кривой AB подвижную точку $M \equiv (x, y, t)$ и пусть теперь символъ S обозначаетъ дугу AM , гдѣ A начало отсчета дугъ Очевидно что S функція t , и, согласно (3), мы имѣемъ:

A S M

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$

откуда $dS = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$

что даетъ хорошо извѣстную формулу

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Если же мы, полагая

$$x = r\cos\omega \qquad y = r\sin\omega$$

перейдемъ отъ Декартовыхъ координатъ къ полярнымъ, то, замѣчая, что

$$dx = \cos\omega\, dr - r\sin\omega\, d\omega$$
$$dy = \sin\omega\, dr + r\cos\omega\, d\omega$$

получимъ

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2$$

ПРИМѢРЫ ВЫЧИСЛЕНІЯ ДУГЪ КРИВЫХЪ.

Дуга циклоиды. Изъ уравненія циклоиды

$$x = a(t - \sin t) \qquad y = a(1 - \cos t),$$

мы находимъ

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt \quad dy = a\sin t\, dt$$
$$dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos t)\,dt^2 = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}\, dt^2$$

Чтобы получить основную вѣтвь циклоиды, мы должны измѣнять параметръ t отъ t_0 до 2π, а потому длина этой вѣтви циклоиды равна:

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a$$

Дуга эллипса. Обозначимъ черезъ s дугу AM, гдѣ M подвижная точка на эллипсѣ, уравненіе котораго

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Если x абсцисса точки M, то имѣемъ

$$s = \int_0^x\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^x\sqrt{1 + y'^2}\,dx \qquad (2)$$

Дифференцируя (1), находимъ

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0 \qquad y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

а потому

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}$$

Пусть c разстояніе фокуса отъ центра, k – эксцентриситетъ эллипса. Такъ какъ

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad k = \frac{c}{a}, \quad c = ka,$$

то

$$1 + y'^2 = \frac{a^2 - k^2x^2}{a^2 - x^2} \qquad (3)$$

и, слѣдовательно,

$$S = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - \kappa^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = \int_0^x \frac{a^2 - \kappa^2 x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - \kappa^2 x^2)}}\, dx \qquad (4)$$

Всякій неопредѣленный интегралъ типа

$$\int f(x, \sqrt{R})\, dx$$

гдѣ f раціональная функція, а R многочленъ третьей или четвертой степени называется эллиптическимъ интеграломъ.

Это потому, что вычисленіе дуги эллипса какъ разъ приводитъ къ интегралу такого типа. Въ самомъ дѣлѣ, въ формулѣ (4) подъ корнемъ стоитъ многочленъ четвертой степени

Доказано, что эллиптическіе интегралы не могутъ быть выражены черезъ элементарныя функціи.

Слѣдовательно, дуга эллипса не можетъ быть выражена черезъ элементарныя функціи, и чтобы вычислить ее, мы принуждены ввести новыя функціи. Эти функціи называются эллиптическими функціями, изученіе которыхъ составляетъ самостоятельный отдѣлъ математики

Сдѣлаемъ въ (4) подстановку $x = a\sin\varphi$. Когда x измѣняется отъ 0 до x, то φ измѣняется отъ 0 до φ. Слѣдовательно после подстановки предѣлы интеграла будутъ 0 и φ, а потому

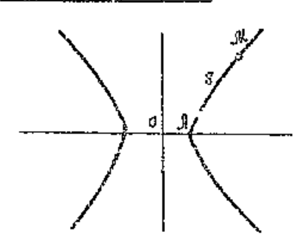
$$S = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

Отсюда слѣдуетъ, что длина четверти эллипса равна

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

<u>Дуга гиперболы</u>. Пусть гипербола дана уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



и обозначимъ черезъ S дугу AM. Имѣемъ:

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

такъ какъ

$$\frac{x}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1 \qquad y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

то

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} = \frac{(a^2 + b^2)x^2 - a^4}{a^2 x^2 - a^4}$$

Но если c фокусное разстояніе, κ - эксцентрицитетъ гиперболы, то

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \frac{c}{a} = \kappa$$

а потому

$$1+y'^2=\frac{k^2x^2-a^2}{x^2-a^2}$$

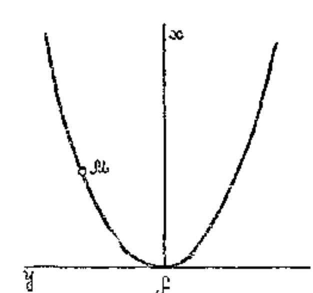
Слѣдовательно

$$S=\int_0^x\sqrt{\frac{k^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}\,dx=\int_0^x\frac{k^2x^2-a^2}{\sqrt{(x^2-a^2)(k^2x^2-a^2)}}\,dx$$

Подъ корнемъ стоитъ многочленъ четвертой степени. Такимъ образомъ, дуга гиперболы выражается, какъ и дуга эллипса, черезъ эллиптическій интегралъ, и, слѣдовательно, не можетъ быть вычислена черезъ элементарныя функціи.

Дуга параболы. Мы обозначимъ черезъ S дугу AM, гдѣ M точка параболы

$$y^2=2px$$



такъ какъ x выражается раціонально черезъ y, то за независимое перемѣнное примемъ y. Имѣемъ

$$S=\int_0^y\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=$$
$$=\frac{1}{p}\int_0^y\sqrt{p^2+y^2}\,dy$$

Интегрируя по частямъ, сначала находимъ

$$\int\sqrt{p^2+y^2}\,dy=y\sqrt{p^2+y^2}-\int\sqrt{p^2+y^2}\,dy+p^2\int\frac{dy}{\sqrt{p^2+y^2}},$$

а потому

$$\int\sqrt{p^2+y^2}\,dy=\frac{y\sqrt{p^2+y^2}}{2}+\frac{p^2}{2}\lg\{y+\sqrt{p^2+y^2}\}+C,$$

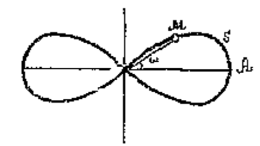
а слѣдовательно

$$S=\frac{y\sqrt{p^2+y^2}}{2p}+\frac{p}{2}\lg\left\{\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}\right\}$$

Такимъ образомъ изъ всѣхъ коническихъ сѣченій только длина дуги параболы можетъ быть выражена черезъ элементарныя функціи.

Длина лемнискаты. Черезъ S мы обозначимъ дугу AM, гдѣ точка лемнискаты, уравненіе которой

$$r=a\sqrt{\cos 2\omega}$$



Имѣемъ

$$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}\,d\omega=\frac{a\,d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

а слѣдовательно

$$S=a\int_0^\omega\frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

Этотъ интегралъ не можетъ быть выраженъ черезъ элементарныя

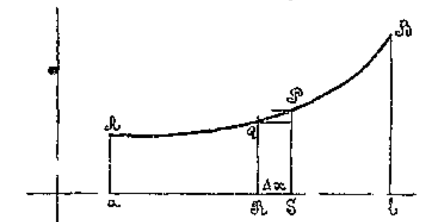
функціи

ОБЪЕМЪ ТѢЛА ВРАЩЕНІЯ

Заставимъ кривую трапецію вращаться около оси x. Тогда данная кривая опишетъ въ пространствѣ нѣкоторую поверхность, которую мы будемъ называть поверхностью вращенія. Сама же трапеція опишетъ нѣкоторое тѣло, которое мы назовемъ тѣломъ вращенія Очевидно, что каждая ордината при вращеніи опишетъ нѣкоторую плоскость, перпендикулярную къ оси x, и ясно, что если мы проведемъ какую-нибудь плоскость, перпендикулярную къ оси x, то эта плоскость пересѣчетъ поверхность вращенія по нѣкоторому кругу

Обозначимъ черезъ v объемъ тѣла, получаемаго отъ вращенія данной трапеціи Это, слѣдовательно, будетъ тѣло, ограниченное поверхностью вращенія и двумя плоскостями, получаемыми отъ вращенія ординатъ крайнихъ точекъ кривой.

Чтобы вычислить объемъ v, поступимъ такъ: раздѣлимъ трапецію на элементарныя полосы и построимъ элементарные прямоугольники какъ внутренніе, такъ и выступающіе. Пусть $PQRS$ одна изъ такихъ полосъ.



При своемъ вращеніи она опишетъ нѣкоторое тѣло, которое мы назовемъ элементарнымъ слоемъ Ясно, что объемъ всего тѣла вращенія равенъ суммѣ объемовъ всѣхъ элементарныхъ слоевъ

Каждый элементарный прямоугольникъ опишетъ цилиндръ, эти цилиндры мы назовемъ элементарными. Они будутъ двухъ родовъ: внутренніе и выступающіе.

Докажемъ что всякій элементарный слой эквивалентенъ соответствующему элементарному цилиндру.

Пусть u объемъ слоя, полученнаго отъ вращенія полоски $PQRS$ Черезъ v и v' обозначимъ объемы внутренняго и выступающаго элементарныхъ цилиндровъ Ясно, что

$$v < u < v' \qquad (1)$$

и въ то же время

$$v = \pi\cdot(QR)^2\cdot RS,$$

$$v' = \pi\cdot(PS)^2\cdot RS$$

Но геометрически очевидно, что факторы $(QR)^2$ и $(PS)^2$

предѣльно-равны а потому $v' \approx v$ и слѣдовательно

$$u \approx v \approx v$$

Если RS обозначимъ черезъ Δx а QR черезъ y, то

$$u \approx \pi y^2 \Delta x$$

Слѣдовательно съ точки зрѣнія эквивалентности элементарный слой можно принимать за цилиндръ, разсматривая вращающуюся полосу не какъ полосу, а какъ прямоугольникъ

Теперь не трудно найти объемъ V всего тѣла. Онъ равенъ суммѣ всѣхъ элементарныхъ слоевъ, которые мы, при переходѣ къ предѣлу замѣняемъ элементарными цилиндрами. Имѣемъ:

$$v = \lim \sum_a^b \pi y^2 \Delta x - \lim \sum_a^b \pi f(x)^2 \Delta x - \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Но если x функція t то

$$\int_a^b \pi f(x)^2 dx - \int_{t_0}^{T} \pi y^2 dx$$

и слѣдовательно

$$v = \lim \sum_a^b \pi y^2 \Delta x - \int_{t_0}^{T} \pi y^2 dx$$

и мы имѣемъ теорему: ЕСЛИ V ОБЪЕМЪ ТѢЛА, ПОЛУЧАЕМАГО ОТЪ ВРАЩЕНІЯ ТРАПЕЦІИ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВОЙ УРАВНЕНІЯ КОТОРОЙ $x = \varphi(t)$, $y - \psi(t)$, ТО

$$v = \pi \int_{t_0}^{T} y^2 dx$$

ГДѢ ПРЕДѢЛАМИ ИНТЕГРАЛА СЛУЖАТЬ ЗНАЧЕНІЯ ПАРАМЕТРА СООТВѢТСТВУЮЩІЯ КРАЙНИМЪ ТОЧКАМЪ КРИВОЙ, ПРИ УСЛОВІИ СЧИТАТЬ НАПРАВЛЕНІЕ КРИВОЙ ВЪ СТОРОНУ ВОЗРАСТАНІЯ АБСЦИССЫ.

Какъ частный случай этой теоремы, отмѣтимъ, что если кривая дана уравненіемъ $y = f(x$ то

$$v - \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Вмѣсто того, чтобы данную кривую вращать около оси x мы могли бы вращать ее около оси y Тогда очевидно что объемъ выразится интеграломъ

$$\pi \int_{t_0}^{T} x^2 dy$$

такъ какъ роли x и y перемѣнятся между собой.

Вообще же какъ общее правило если требуется вычислить объемъ какого-нибудь тѣла вращенія, то прежде всего мы должны принять ось вращенія за ось x Разсмотримъ примѣры

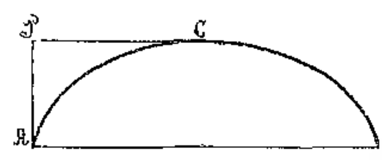
Объемъ тѣла вращенія циклоиды Пусть v объемъ (черт. ниже) тѣла, полученнаго отъ вращенія около оси x циклоиды, уравненіе которои

$$x = a(t - \sin t) \qquad y = a(1-\cos t)$$

Имѣемъ

$$v = \pi\int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt =$$
$$= \pi a^3 \Big/_{t_0}^{t=2\pi}\left[\frac{5}{2}t - 2\sin t + \frac{3\sin 2t}{4} - \frac{\sin^3 t}{3}\right] = 5\pi^2 a^3$$

Но вмѣсто того чтобы вращать циклоиду около оси x мы могли бы вращать ее около оси y. Обозначая этотъ объемъ черезъ v', мы, чтобы имѣть возможность приложить выведенныя формулы, должны разсматривать его какъ разность между объемами, полученными отъ вращенія фигуры $ABCP$ и фигуры ACP гдѣ C вершина циклоиды, для которои $t = \pi$.



Имѣемъ: *)

$$v' = \pi\int_{2\pi}^{\pi} x^2 dy - \pi\int_0^{\pi} x^2 dy = \pi\int_{2\pi} + \pi\int_{\pi}^{0}$$

и слѣдовательно

$$v' = \pi\int_{2\pi}^{0} x^2 dy = \pi a^3\int_{2\pi}^{0}(t - \sin t)^2 \sin t\, dt = 2\pi(2\pi+1)a^3$$

Объемъ эллипсоида вращенія Пусть v объемъ тѣла полученнаго отъ вращенія эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вокругъ большои оси. Имѣемъ

$$v = \pi\int_{-a}^{+a} y^2 dx = \pi\int_{-a}^{+a}\left(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

Если же черезъ v обозначимъ объемъ эллипсоида вращенія около малои оси, то

$$v = \pi\int_{-b}^{+b} x^2 dy = \pi\int_{-b}^{+b}\left(a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2}\right)dy = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

---

*) *Почему въ первомъ интегралѣ предѣлы надо взять въ этомъ порядкѣ, а не въ обратномъ?*

ПОВЕРХНОСТЬ ТѢЛА ВРАЩЕНІЯ

Пусть кривая AB, уравненія которой

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t),$$

вращается около оси x. Эта кривая можетъ пересѣкаться прямой, параллельной оси y, не только въ одной, но и въ нѣсколькихъ точкахъ.

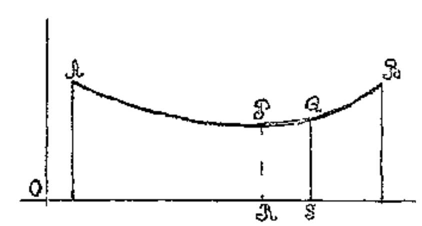
При своемъ вращеніи кривая опишетъ нѣкоторую поверхность, величину площади которой мы обозначимъ черезъ S и постараемся найти формулу для вычисленія ея.

Эта задача рѣшается безъ особаго труда, если мы предварительно точно условимся, что разумѣть подъ площадью поверхности вращенія.

ПОДЪ ПЛОЩАДЬЮ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНІЯ РАЗУМѢЮТЪ ПРЕДѢЛЪ ПЛОЩАДИ ТОЙ ПОВЕРХНОСТИ, КОТОРАЯ ПОЛУЧАЕТСЯ ОТЪ ВРАЩЕНІЯ ЛОМАННОЙ ЛИНІИ, ВПИСАННОЙ ВЪ ДАННУЮ КРИВУЮ, ВЪ ПРЕДПОЛОЖЕНІИ, ЧТО ЗВЕНЬЯ ЭТОЙ ЛОМАННОЙ ЛИНІИ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮТСЯ.

Это опредѣленіе въ то же время указываетъ тотъ путь, по которому мы должны итти для вычисленія S.

Вписываемъ въ данную кривую ломанную линію. Пусть PQ какое-нибудь ея звено. При вращеніи около оси x это звено опишетъ боковую поверхность усѣченнаго конуса, которую обозначимъ черезъ p. По извѣстной формулѣ изъ элементарной геометріи имѣемъ



$$p = \pi(PR + QS)\cdot RS \qquad (1)$$

Пусть y ордината какой-нибудь точки дуги PQ. Въ предѣлѣ разности

$$PR - y \quad \text{и} \quad QS - y$$

очевидно равны нулю. Слѣдовательно въ (1) факторъ $PR + QS$ предѣльно равенъ $2y$, а потому

$$p \approx 2\pi y\, PQ \qquad (2)$$

Пусть s - длина дуги AP. Тогда дуга $PQ = \Delta s$. Во (2) хорду PQ можно замѣнить эквивалентной ей дугой Δs, а потому

$$p \approx 2\pi y \Delta s \qquad (3)$$

Слѣдовательно, съ точки зрѣнія эквивалентности можно разсматривать дугу Δs какъ прямую, которая при вращеніи описываетъ поверхность элементарнаго конуса, который въ свою очередь можно разсматривать какъ цилиндръ, радіусъ основанія котораго y, а высота Δs.

Пусть длина всей кривой AB равна l, и будемъ на время, что всегда возможно, разсматривать y какъ функцію s. Пусть $y = \varphi(s)$.
Если теперь S площадь всей поверхности вращенія, то, согласно съ (3),

$$S = \lim \sum_0^l 2\pi y \Delta s = \lim \sum_0^l 2\pi \varphi(s) \Delta s = \int_0^l 2\pi \varphi(s) ds$$

т.е.

$$S = \lim \sum_0^l 2\pi y \Delta s = \int_0^l 2\pi y ds \qquad (4)$$

Но если x и y функціи параметра t, то и s есть функція t. Поэтому, если въ (4) мы станемъ s разсматривать какъ функцію t, то по теоремѣ о подстановкѣ

$$\int_0^l 2\pi y ds = \int_{t_0}^T 2\pi y ds,$$

гдѣ въ лѣвой части y функція s, а въ правой y и s функціи t.
Теперь (4) даетъ:

$$S = \lim \sum_0^l 2\pi y \Delta s = \int_{t_0}^T 2\pi y ds$$

а потому теорема

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНІЯ КРИВОЙ ОПРЕДѢЛЯЕТСЯ ПО ФОРМУЛѢ

$$S = \int_{t_0}^T 2\pi y ds$$

ГДѢ y И s РАЗСМАТРИВАЮТСЯ КАКЪ ФУНКЦІИ ПАРАМЕТРА.
Если же кривая дана уравненіемъ $y = f(x)$, то имѣемъ

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Поверхность вращенія циклоиды. Пусть циклоида, уравненія которой

$$x = a(t - \sin t) \qquad y = a(1 - \cos t), \qquad (1)$$

вращается около оси x. Имѣемъ

$$dx = a(1 - \cos t)dt \quad dy = a \sin t\, dt \qquad ds = 2a \sin\frac{t}{2} dt \qquad (2)$$

Если S площадь поверхности, описанной всею дугою циклоиды, то

$$S = \int_0^{2\pi} 2\pi y ds = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin\frac{t}{2} dt = \frac{64\pi a^3}{3}$$

Предположимъ теперь, что циклоида вращается около оси y. Обозначимъ черезъ S_1, площадь поверхности, описанной ея дугой. Очевидно, что теперь x и y мѣняются ролями, а потому

$$S_1 = 2\pi \int_0^{2\pi} x ds = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin\frac{t}{2} dt = 16\pi^2 a^2$$

Поверхность эллипсоида вращенія около большей оси. Пусть a, b соотвѣтственно большая и малая полуось. Черезъ $2c$ и k обозначимъ фокусное разстояніе и эксцентрицитетъ эллипса:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad k = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \qquad (1)$$

Если S площадь поверхности, описанной дугою ABA, то, считая x независимымъ перемѣннымъ, мы имѣемъ:

$$S = \int_{-a}^{+a} 2\pi y\, ds = \int_{-a}^{+a} 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad (2)$$

а потому

$$S = \frac{2\pi b}{a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - k^2 x^2}\, dx \qquad (3)$$

и такъ какъ *)

$$\int \sqrt{a^2 - k^2 x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - k^2x^2}}{2} + \frac{a^2}{2k} \arcsin \frac{kx}{a} + C$$

то

$$S = 2\pi ab\left(\sqrt{1-k^2} + \frac{\arcsin k}{k}\right) \qquad (4)$$

Любопытно то, что изъ этой формулы не такъ еще просто получить формулу для поверхности сферы. Въ самомъ дѣлѣ, для сферы $a = b$ и $k = 0$. Но правая часть равенства (4) при $k = 0$ принимаетъ неопредѣленный видъ. Только предварительно раскрывъ эту неопредѣленность, мы получимъ формулу для поверхности шара. Поэтому, предполагая въ (4) что k безконечно умаляется, и обозначая черезъ σ поверхность сферы радіуса a, мы имѣемъ:

$$\sigma = 2\pi ab \left\{1 + \lim \frac{\arcsin k}{k}\right\} = 4\pi a^2$$

Поверхность эллипсоида вращенія около малой оси. Принимая y за независимое перемѣнное и обозначая черезъ S' площадь поверхности, описанной дугою $B'AB$ (черт. выше), мы имѣемъ

$$S' = \int_{-b}^{+b} 2\pi x \sqrt{1 + x'^2}\, dy \qquad (1)$$

гдѣ x' производная отъ x по y. Но изъ уравненія эллипса

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \qquad x' = -\frac{ay}{b\sqrt{b^2-y^2}}$$

---

*) $\int \sqrt{a^2 - k^2x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - k^2x^2} + \int \frac{k^2x^2}{\sqrt{a^2-k^2x^2}} dx = x\sqrt{a^2-k^2x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2-k^2x^2)}{\sqrt{a^2-k^2x^2}} dx$

а потому

$$S' = \frac{2\pi a}{b^2}\int_{-b}^{+b}\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}\,dy$$

Интегрируя по частямъ, найдемъ

$$\int\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}\,dy = \frac{1}{2}y\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2} + \frac{b^4}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}},$$

а потому

$$S = \Big|_{y=-b}^{y=+b}\left\{\frac{\pi a y}{b}\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2} + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\lg\left[y\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}\right]\right\}$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\lg\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Но

$$b^2 - a^2 = c^2 \qquad c = ak \qquad a^2 - b^2 = a^2k^2$$

Слѣдовательно окончательно

$$S = 2\pi a^2\left(1 + \frac{1 - k^2}{2k}\lg\frac{1 + k}{1 - k}\right)$$

Пусть k безконечно умаляется. Обозначая черезъ σ поверхность сферы, имѣемъ

$$\sigma = 2\pi a^2\left(1 + \frac{1}{2}\lim_{k=0}\frac{\lg(1+k) - \lg(1-k)}{k}\right) = 4\pi a^2$$

ДУГА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ.

Пусть AB пространственная кривая уравненіе которой

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t)$$

Черезъ t_0 и T обозначимъ значенія t для конечныхъ точекъ A и B причемъ пусть $t_0 < T$.

Вставимъ между A и B рядъ промежуточныхъ точекъ M_1, M_2, M_3, ... M_{n-1}. Пусть вообще

$$M_k \equiv (x_k, y_k, z_k, t_k) \qquad x_k = \varphi(t_k), \quad y_k = \psi(t_k) \qquad z_k = \omega(t_k)$$

Всякую точку M_k соединяемъ хордою l_k съ точкою M_{k+1}. Получимъ ломанную линію, вписанную въ данную кривую периметръ которой обозначимъ черезъ P. Имѣемъ.

$$l_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2 + (z_{k+1} - z_k)^2}$$

$$= \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2 + [\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]^2}$$

Примѣняя теорему Лагранжа получимъ:

$$P = \sum l_k = \sum_k \sqrt{\varphi'(\tau_k')^2 + \psi'(\tau_k'')^2 + \omega'(\tau_k''')^2}\,\Delta t$$

Переходимъ къ предѣлу. Замѣняя факторы предѣльно равными величинами, имѣемъ:

$$\lim \mathcal{P} = \lim \sum_t^T \sqrt{\varphi'(\tau_k)^2 + \psi'(\tau_k)^2 + \omega'(\tau_k)^2}\, \Delta t_k$$

гдѣ τ_k произвольно взятая величина въ промежуткѣ (t_k , t_{k+1}).

Если мы теперь условимся называть предѣлъ $\mathcal{P}$ длиною дуги $\mathcal{AB}$ и обозначимъ эту длину черезъ S, то получимъ теорему

ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ, ДАННОЙ УРАВНЕНІЯМИ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$ ОПРЕДѢЛЯЕТСЯ ПО ФОРМУЛѢ

$$S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \omega'(t)^2}\, dt = \int_{t_0}^{T} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

гдѣ t_0 и T ЗНАЧЕНІЯ ПАРАМЕТРА ВЪ НАЧАЛЬНОЙ И КОНЕЧНОЙ ТОЧКАХЪ КРИВОЙ.

Возьмемъ теперь на кривой двѣ точки $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}' \equiv (x', y', z', t') \quad , \quad \mathcal{M} \equiv (x, y, z'', t)$$

Мы имѣемъ

$$\text{дуга}\ \mathcal{M}'\mathcal{M} = \int_{t'}^{t} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \omega'(t)^2}\, dt$$

Теорема же о среднемъ значеніи интеграла намъ даетъ

$$\text{дуга}\ \mathcal{M}'\mathcal{M}'' = \sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2 + \omega'(\tau)^2}\,(t - t') \qquad (2)$$

Вычислимъ хорду $\mathcal{M}'\mathcal{M}$. Имѣемъ

$$\text{хорда}\ \mathcal{M}'\mathcal{M}'' = \sqrt{[\varphi(t) - \varphi(t')]^2 + [\psi(t) - \psi(t')]^2 + [\omega(t) - \omega(t')]^2} =$$

$$= \sqrt{\varphi'(\tau')^2 + \psi'(\tau'')^2 + \omega'(\tau''')^2}\,(t - t') \qquad (3)$$

а потому

$$\frac{\text{дуга}\ \mathcal{M}'\mathcal{M}}{\text{хорда}\ \mathcal{M}'\mathcal{M}} = \frac{\sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2 + \omega'(\tau)^2}}{\sqrt{\varphi'(\tau')^2 + \psi'(\tau'')^2 + \omega'(\tau''')^2}} .$$

Предполагаемъ, что дуга $\mathcal{M}'\mathcal{M}$ умаляется до нуля. Переходя къ предѣлу и замѣчая что въ предѣлѣ τ, τ', τ'', τ''' равны t', получаемъ теорему:

ПРЕДѢЛЪ ОТНОШЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩЕЙСЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДУГИ КЪ ЕЯ ХОРДѢ РАВЕНЪ ЕДИНИЦѢ.

ГЛАВА IX ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛЪ

Задача о квадратурѣ площадей, будучи облечена въ аналитическую форму, привела насъ къ понятію объ опредѣленномъ интегралѣ

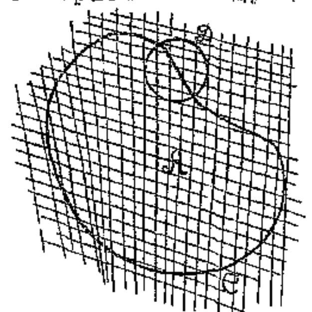
Задача о вычисленіи объемовъ тѣлъ произвольной формы приведетъ къ понятію о такъ называемыхъ двойныхъ интегралахъ.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЯ ПЛОЩАДКИ

Пусть $\mathfrak{A}$ часть плоскости, ограниченная контуромъ C. Вообразимъ, что вся плоскость раздѣлена на достаточно малыя площадки произвольной формы. Эти площадки мы будемъ называть элементарными. Онѣ могутъ быть какой угодно формы, но мы предположимъ, что размѣръ*) каждой изъ нихъ меньше некоторой положительной величины λ.

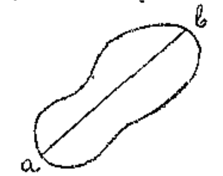
Всѣ площадки по отношенію къ данной фигурѣ $\mathfrak{A}$ раздѣляются на три класса: на внутреннія, внѣшнія и граничныя. Сумму всѣхъ граничныхъ площадокъ обозначимъ черезъ g. При этомъ граничной площадкой мы будемъ называть всякую площадку, которая имѣетъ хотя бы только одну точку общую съ контуромъ C.

Вообразимъ слѣдующій процессъ: раздѣливъ всю плоскость по какому-нибудь закону на элементарныя площадки, и вычисливъ величину суммы всѣхъ граничныхъ площадокъ, мы послѣ этого снова дѣлимъ всю плоскость по какому-нибудь закону на элементарныя площадки и вычисляемъ сумму граничныхъ площадокъ для этого дѣленія, и такъ продолжаемъ неограниченно, т. е. всякій разъ какъ мы вычислили сумму граничныхъ площадокъ для какого-нибудь дѣленія плоскости на элементарныя площадки, мы переходимъ къ новому дѣленію плоскости на элементарныя площадки. Легко убѣдиться въ справедливости слѣдующей леммы:



ЕСЛИ ПЕРЕХОДЪ ОТЪ ОДНОГО ДѢЛЕНІЯ ПЛОСКОСТИ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЯ ПЛОЩАДКИ КЪ СЛѢДУЮЩЕМУ ДѢЛЕНІЮ СОВЕРШАЕТСЯ ПО ТАКОМУ ЗАКОНУ, ЧТО НАИБОЛЬШІЙ РАЗМѢРЪ ПЛОЩАДОКЪ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЕТСЯ, ТО ВЪ ТАКОМЪ СЛУЧАѢ СУММА ВСѢХЪ ГРАНИЧНЫХЪ ПЛОЩАДОКЪ ВЪ ПРЕДѢЛѢ ТОЖЕ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЕТСЯ.

*) *Размѣромъ площадки (также, діаметромъ ея), называется длина наибольшей хорды, которая можетъ быть уложена между двумя точками контура, ограничивающаго площадку. На приложенномъ чертежѣ размѣръ площадки изображается хордой* ab.



Пусть при какомъ-нибудь дѣленiи наибольшiй размѣръ всѣхъ элементарныхъ площадокъ меньше или равенъ λ. Воображаемъ кружокъ $\mathfrak{D}$ радiуса λ, и этотъ кружокъ помѣстимъ такъ, чтобы его центръ совпалъ съ какой-нибудь точкой контура C. Заставимъ центръ кружка описать весь контуръ C. Тогда, очевидно, что всѣ точки кружка опишутъ на плоскости нѣкоторую полосу $\mathfrak{L}$ *). Геометрически очевидно, что, если λ безконечно умаляется, то площадь полосы $\mathfrak{L}$ тоже безконечно умаляется. Не трудно также сообразить, что всякая граничная площадка лежитъ внутри полосы. Въ самомъ дѣлѣ, если c - точка, общая граничной площадкѣ и контуру, то, когда центръ кружка попадетъ въ эту точку, площадка будетъ внутри кружка, потому что размѣръ ея меньше радiуса кружка. Слѣдовательно, сумма q всѣхъ граничныхъ площадокъ меньше площади безконечно умаляющейся полосы $\mathfrak{L}$, а потому $\lim q = 0$

Лемма доказана. Ее можно обобщить слѣдующимъ образомъ: обозначимъ черезъ q' ту сумму, которую получимъ, если будемъ брать отъ каждой граничной площадки только нѣкоторую часть ея. Очевидно, что $q' < q$ а потому: не только сумма всѣхъ граничныхъ площадокъ, но также и сумма любыхъ произвольно взятыхъ частей этихъ площадокъ въ предѣлѣ равна нулю.

Пусть теперь s сумма всѣхъ внутреннихъ элементарныхъ площадокъ. Черезъ S обозначимъ сумму, какъ всѣхъ внутреннихъ такъ и всѣхъ граничныхъ площадокъ, такъ что

$$S = s + q$$

Пусть, наконецъ, $\mathfrak{A}$ площадь фигуры, ограниченной контуромъ C. Геометрически очевидны неравенства

$$\mathfrak{A} - s < q \qquad S - \mathfrak{A} < q$$

и такъ какъ въ предѣлѣ q равно нулю, то

$$\mathfrak{A} = \lim s = \lim S,$$

и мы получаемъ теорему: ВСЯКУЮ ПЛОЩАДЬ, ОГРАНИЧЕННУЮ ЗАМКНУТЫМЪ КОНТУРОМЪ, МОЖНО РАЗСМАТРИВАТЬ, КАКЪ ПРЕДѢЛЪ СУММЫ ВНУТРЕННИХЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ПЛОЩАДОКЪ, А ТАКЖЕ КАКЪ ПРЕДѢЛЪ СУММЫ ВСѢХЪ ВНУТРЕННИХЪ И ГРАНИЧНЫХЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ПЛОЩАДОКЪ.

---

*) *Вообразимъ, что кружокъ сдѣланъ изъ картона и что сторона его, приложенная къ чертежу, намазана чернилами. Слѣдъ чернилъ даетъ полосу* $\mathfrak{L}$.

ОБЪЕМЪ ЦИЛИНДРА

Мы теперь можемъ вывести формулу для объема всякаго цилиндра.

Какъ извѣстно цилиндрической поверхностью называется поверхность которая можетъ быть получена слѣдующимъ образомъ: предполагаемъ, что намъ дана какая-нибудь кривая линія и воображаемъ, что нѣкоторая прямая, называемая образующей, перемѣщается въ пространствѣ такъ что она остается параллельной самой себѣ и въ то же время постоянно проходитъ черезъ какую-нибудь точку данной кривой. Слѣдъ этой прямой въ пространствѣ и даетъ цилиндрическую поверхность. Очевидно, что можно дать также и слѣдующее опредѣленіе цилиндрической поверхности цилиндрическая поверхность есть геометрическое мѣсто прямыхъ, проходящихъ черезъ всѣ точки данной кривой и параллельныхъ между собой.

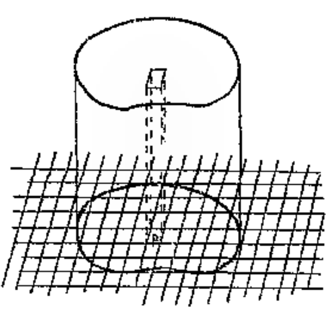
Если данная кривая принадлежитъ къ классу замкнутыхъ кривыхъ, то мы будемъ имѣть замкнутую цилиндрическую поверхность

Предположимъ же, что мы имѣемъ нѣкоторую замкнутую цилиндрическую поверхность. Пересѣчемъ ее двумя плоскостями, параллельными между собой и перпендикулярными къ образующей. Мы получимъ тѣло ограниченное съ боковъ цилиндрической поверхностью и кромѣ того двумя плоскостями. Это и будетъ, такъ называемый прямой цилиндръ. Части плоскостей, ограничивающихъ его, называются его основаніями Очевидно, что эти плоскости пересѣкаютъ цилиндрическую поверхность по двумъ совершенно тожественнымъ кривымъ. Длина образующей между основаніями называется высотой цилиндра.

Пусть C контуръ, ограничивающій нижнее основаніе цилиндра, площадь котораго обозначимъ черезъ A Пусть H высота цилиндра, v его объемъ.

Чтобы вычислить объемъ цилиндра раздѣлимъ площадь основанія на элементарныя площади слѣдующимъ образомъ: мы проведемъ двѣ системы прямыхъ такъ, чтобы прямыя каждой системы были параллельны между собой, прямыя же различныхъ системъ перпендикулярны между собой. Этими двумя системами вся плоскость основанія раздѣлится на элементарные прямоугольники. Часть изъ этихъ прямоугольниковъ будетъ лежать внутри контура C . Ихъ площади обозначимъ черезъ p_1, p_2, p_3 .... Другая часть прямоугольниковъ дастъ намъ граничные прямоугольники. Площади ихъ обозначимъ черезъ q_1, q_2, q_3, . Пусть, наконецъ, какъ и раньше, s сумма площадей всѣхъ внутреннихъ прямоугольниковъ, а S сумма какъ всѣхъ внутреннихъ,

такъ и всѣхъ граничныхъ прямоугольниковъ.



Если мы вообразимъ, что число элементарныхъ прямоугольниковъ безконечно возрастаетъ такъ, что размѣры ихъ въ то же время безконечно умаляются, то, какъ мы видѣли,

$$\lim s = \lim S = A.$$

Возьмемъ какую-нибудь элементарную площадку p_k и построимъ на ней призму, верхнее основаніе которой совпадаетъ съ верхнимъ основаніемъ цилиндра. Будемъ называть эту призму элементарной призмой. Объемъ ея очевидно равенъ $p_k H$

Воображаемъ, что подобныя элементарныя призмы построены на всякой элементарной площадкѣ, какъ на внутренней, такъ и на граничной. Сумма объемовъ всѣхъ внутреннихъ элементарныхъ призмъ очевидно равна

$$p H + p_2 H + p_3 H + \qquad = H s$$

и ясно, что эта сумма меньше объема цилиндра.

Сумма же объемовъ какъ всѣхъ внутренних элементарныхъ призмъ, такъ и граничныхъ, равна

$$p_1 H + p_2 H + p_3 H + \ldots\ldots + q H + q_2 H + q_3 H + \qquad = H S$$

и очевидно, что эта сумма больше объема цилиндра

Такимъ образомъ, мы имѣемъ неравенства

$$H s < v < H S \qquad (1)$$

Воображаемъ теперь, что число элементарныхъ площадокъ безконечно возрастаетъ такъ, что размѣры ихъ безконечно умаляются. Въ предѣлѣ неравенства (1) даютъ соотношенія:

$$H \lim s \leqq v \leq H \lim S,$$

т.е

$$H A \leqq v \leqq H A$$

Теперь ясно, что

$$v = A H,$$

и получаемъ теорему. ОБЪЕМЪ ВСЯКАГО ЦИЛИНДРА, ОБРАЗУЮЩАЯ КОТОРАГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА КЪ ОСНОВАНІЮ ЕГО, РАВЕНЪ ПРОИЗВЕДЕНІЮ ПЛОЩАДКИ ОСНОВАНІЯ НА ВЫСОТУ ЦИЛИНДРА.

ОБЪЕМЪ ЦИЛИНДРОИДА.

Предположимъ теперь, что мы установили въ пространствѣ прямоугольную систему Декартовыхъ осей координатъ, и пусть намъ дана нѣкоторая поверхность S , относительно которой предположимъ,

что она всѣми точками расположена надъ плоскостью xy и что каждой прямой, параллельной оси z, она пересѣкается только въ одной точкѣ. Тогда уравненіе этой поверхности можетъ быть представлено въ слѣдующей формѣ:

$$z = f(x, y)$$

гдѣ $f(x, y)$ непрерывная функція двухъ перемѣнныхъ.

На плоскости xy проведемъ нѣкоторый замкнутый контуръ C, на которомъ построимъ цилиндрическую поверхность съ образующими параллельными оси z Эта поверхность пересѣчетъ данную поверхность S по нѣкоторой замкнутой кривой, которую обозначимъ черезъ C'. Пусть S' та часть поверхности S, которая ограничена контуромъ C'.

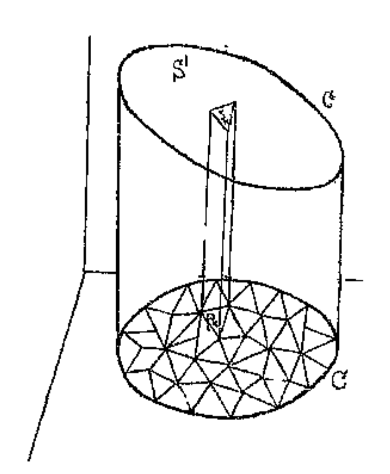
Мы теперь имѣемъ тѣло которое съ боковъ ограничено цилиндрической пове-рхностью, снизу плоскостью xy, сверху же частью S' данной поверхности S. Тѣла подобной формы мы будемъ называть цилиндроидами. Въ частномъ случаѣ нѣкоторыя образующія, и даже всѣ, могутъ быть равны нулю Такъ, напримѣръ, полушаръ мы можемъ разсматривать какъ цилиндроидъ безъ боковой поверхности.

Чтобы вычислить объемъ цилиндроида, поступимъ слѣдующимъ образомъ обозначая черезъ A площадь, ограниченную контуромъ C, дѣлимъ ее на элементарныя площадки p_1, p_2, p_3... Возьмемъ изъ нихъ какую-нибудь площадку p_k. На контурѣ ея построимъ цилиндрическую поверхность. То тѣло, которое съ боковъ ограничено этой поверхностью, снизу площадкой p_k, сверху же частью поверхности S мы назовемъ элементарнымъ цилиндроидомъ и объемъ его обозначимъ черезъ u_k. Воображаемъ что на каждой элементарной площадкѣ построенъ соотвѣтствующій ей элементарный цилиндроидъ. Очевидно, что, если V объемъ даннаго цилиндроида то

$$V = u_1 + u_2 + u_3$$

или, короче,

$$V = \sum u_k$$



Если бы мы могли вычислить объемъ каждаго элементарнаго цилиндроида то мы могли бы вычислить и объемъ даннаго цилиндроида. Но при вычисленіи объема элементарнаго цилиндроида мы встрѣчаемся съ тѣми же трудностями, какъ и при вычисленіи

объема даннаго цилиндроида. Легко однако видѣть, что, вмѣсто объема элементарнаго цилиндроида, мы можемъ взять объемъ такъ называемаго элементарнаго цилиндра, который мы получимъ слѣдующимъ образомъ

Внутри площадки p_k возьмемъ произвольно точку s_k съ координатами ξ_k и η_k. Возставимъ въ ней перпендикуляръ, который пусть пересѣчетъ поверхность въ точкѣ s'_k Аппликату*) этой точки обозначимъ черезъ z_k

Если мы теперь черезъ точку s_k проведемъ плоскость, параллельную плоскости xy, то мы получимъ цилиндръ, который снизу ограниченъ площадкой p_k, сверху плоскостью, проведенной черезъ точку s'_k, съ боковъ же цилиндрической поверхностью, построенной на контурѣ, ограничивающемъ площадку p_k. Объемъ этого цилиндра мы обозначимъ черезъ v_k и будемъ его называть элементарнымъ цилиндромъ общаго типа. Высотой его служитъ аппликата какой-нибудь точки s'_k той части поверхности S, которая лежитъ надъ площадкой p_k. Если мы будемъ брать различныя точки s'_k, то будемъ получать различные элементарные цилиндры.

Но среди различныхъ точекъ s_k, лежащихъ на поверхности надъ площадкой p_k, есть точка, аппликата которой меньше всѣхъ остальныхъ, и есть точка, аппликата которой больше всѣхъ остальныхъ. Обозначимъ черезъ z'_k наименьшую, черезъ z''_k наибольшую изъ этихъ аппликатъ, и построимъ два элементарныхъ цилиндра, общимъ основаніемъ которыхъ служитъ площадка p_k, а высотами соотвѣтственно аппликаты z'_k и z''_k. Объемы этихъ цилиндровъ обозначимъ черезъ v_k и v_k; первый цилиндръ будемъ называть внутреннимъ элементарнымъ цилиндромъ, а второй-выступающимъ. Тотъ и другой изъ нихъ, очевидно, есть частный случай элементарнаго цилиндра общаго типа. Геометрически очевидны неравенства

$$v'_k < v_k < v'_k$$

$$v_k < u_k < v_k \qquad (1)$$

Докажемъ, что если число элементарныхъ площадокъ безконечно возрастаетъ такъ, что размѣры ихъ безконечно умаляются, то v'_k, v''_k, v_k, u_k эквивалентны между собой. Въ самомъ дѣлѣ

$$v_k = p_k z_r \qquad v''_k = p_k z''_k$$

---

*) *Если x, y, z координаты точки M, то x абсцисса, y-ордината, z-аппликата*

Ясно, что въ предѣлѣ разность $z_k - z_k'$ равна нулю. Слѣдовательно, z_k и z_k' предѣльно равны, а потому

$$v_k \approx v_k'$$

Изъ (1) слѣдуетъ, что

$$u_k \approx v_k \qquad v_k \approx v_k$$

и такъ какъ двѣ величины, эквивалентныя третьей, эквивалентны между собой, то u_k эквивалентно v_k.

Итакъ, мы доказали слѣдующее. объемъ элементарнаго цилиндроида эквивалентенъ объему элементарнаго цилиндра.

Но если V объемъ даннаго цилиндроида, то равенство

$$V - \sum u_k \qquad (2)$$

существуетъ при всякомъ дѣленiи площади A на элементарныя площадки, а потому, если число элементарныхъ площадокъ безконечно возрастаетъ такъ, что размѣры ихъ безконечно умаляются, то равенство (2) будетъ имѣть мѣсто и въ предѣлѣ

$$V \ \lim \sum u_k$$

Но теперь въ правой части мы всякое слагаемое u_k можемъ замѣнить эквивалентной ему величиной v_k, а потому

$$V = \lim \sum v_k$$

и мы имѣемъ теорему: ОБЪЕМЪ ЦИЛИНДРОИДА РАВЕНЪ ПРЕДѢЛУ СУММЫ ОБЪЕМОВЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ЦИЛИНДРОВЪ

Посмотримъ теперь, какъ эта теорема выразится въ аналитической формѣ

Объемъ элементарнаго цилиндра, построеннаго на площадкѣ p_k, равенъ $p_k z_k$, гдѣ z_k аппликата точки s_k'. Если абсциссу и ординату этой точки обозначимъ черезъ ξ_k и η_k, то

$$z_k - f(\xi_k, \eta_k)$$

гдѣ ξ_k и η_k мы можемъ разсматривать, какъ абсциссу и ординату точки s_k, взятой нами произвольно внутри площадки p_k.

Такимъ образомъ, объемъ элементарнаго цилиндра, построеннаго на площадкѣ p_k равенъ произведенiю $f(\xi_k \ \eta_k) p_k$.

а если черезъ σ мы обозначимъ сумму всѣхъ элементарныхъ объемовъ то

$$\sigma - \sum f(\xi_k \ \eta_o) p_k$$

и мы можемъ высказать слѣдующее положеніе

ЧТОБЫ ВЫЧИСЛИТЬ ОБЪЕМЪ ЦИЛИНДРОИДА, ОГРАНИЧЕННАГО СВЕРХУ ПОВЕРХНОСТЬЮ S, УРАВНЕНІЕ КОТОРОЙ

$$z = f(x, y)$$

НАДО РАЗДѢЛИТЬ ОСНОВАНІЕ ЦИЛИНДРОИДА НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЯ ПЛОЩАДКИ, И ВЗЯТЬ СУММУ ВСѢХЪ ТѢХЪ ПРОИЗВЕДЕНІЙ, КОТОРЫЯ ПОЛУЧИМЪ, УМНОЖАЯ ПЛОЩАДЬ p_k КАЖДОЙ ПЛОЩАДКИ НА ЗНАЧЕНІЕ *) ФУНКЦІИ $f(\xi_k, \eta_k)$ ВЪ КАКОЙ-НИБУДЬ ТОЧКѢ s_k, ЛЕЖАЩЕЙ ВНУТРИ ЭТОЙ ПЛОЩАДКИ. ПРЕДѢЛЪ ПОЛУЧЕННОЙ ТАКИМЪ ОБРАЗОМЪ СУММЫ

$$\sigma = \sum f(\xi_k \eta_k) p_k$$

РАВЕНЪ ОБЪЕМУ ЦИЛИНДРОИДА.

Итакъ, для вычисленія объемовъ надо умѣть находить предѣлы суммъ типа σ, предѣлы подобныхъ суммъ и называются двойными интегралами.

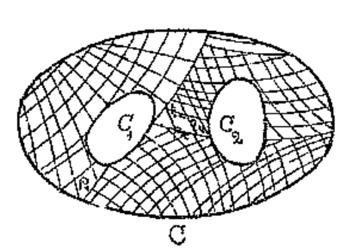
ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛЪ.

Понятіе о двойномъ интегралѣ мы вводимъ съ помощью слѣдующего опредѣленія:

ПРЕДПОЛАГАЕМЪ, ЧТО НА ПЛОСКОСТИ ВЫБРАНА ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА ДЕКАРТОВЫХЪ ОСЕЙ КООРДИНАТЪ, А ПУСТЬ $f(x, y)$ НѢКОТОРАЯ ДАННАЯ ФУНКЦІЯ ДВУХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ, НЕПРЕРЫВНАЯ ВО ВСѢХЪ ТОЧКАХЪ НѢКОТОРОЙ ПЛОЩАДИ A, ОГРАНИЧЕННОЙ ОДНИМЪ ИЛИ НѢСКОЛЬКИМИ КОНТУРАМИ (НА ЧЕРТЕЖѢ ТРЕМЯ: ВНѢШНИМЪ C, И ВНУТРЕННИМИ C_1 И C_2).

ПЛОЩАДЬ A РАЗБИВАЕТСЯ НА КАКІЯ УГОДНО ЭЛЕМЕНТАРНЫЯ ПЛОЩАДКИ p, p_2, p_3, p_4, ..., ВНУТРИ КАЖДОЙ ПЛОЩАДКИ p_k БЕРЕМЪ ПРОИЗВОЛЬНО КАКУЮ-НИБУДЬ ТОЧКУ СЪ КООРДИНАТАМИ ξ_k И η_k, И ЗНАЧЕНІ ДАННОЙ ФУНКЦІИ ВЪ ЭТОЙ ТОЧКѢ ПОМНОЖАЕМЪ НА ВЕЛИЧИНУ ПЛОЩАДКИ p_k ПОЛУЧАЕМЪ ПРОИЗВЕДЕНІЕ

$$f(\xi_k, \eta_k) p_k$$



СОСТАВЛЯЕМЪ ПОДОБНЫЯ ПРОИЗВЕДЕНІЯ ДЛЯ КАЖДОЙ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ПЛОЩАДКИ И БЕРЕМЪ СУММУ ИХЪ ВСѢХЪ. ПУСТЬ

$$\sigma - \sum f(\xi_k \eta_k) p_r$$

ПРЕДѢЛЪ СУММЫ σ, ВЪ ПРЕДПОЛОЖЕНІИ, ЧТО ЧИСЛО ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ПЛО-

*) *То значеніе, которое функція получаетъ при* x a, *и* y b, *называется значеніемъ функціи въ точкѣ* (a, b)

ЩАДОКЪ БЕЗКОНЕЧНО ВОЗРАСТАЕТЪ ДО БЕЗКОНЕЧНОСТИ ТАКЪ, ЧТО РАЗМѢРЫ ИХЪ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮТСЯ, НАЗЫВАЕТСЯ ДВОЙНЫМЪ ИНТЕГРАЛОМЪ, РАСПРОСТРАНЕННЫМЪ НА ПЛОЩАДЬ A , ИЛИ ВЗЯТЫМЪ ПО ПЛОЩАДИ A , И ОБОЗНАЧАЕТСЯ ТАКЪ·

$$\iint_A f(x\ y)\,de$$

Слѣдовательно, по опредѣленію

$$\iint_A f(x\ y)\,de = \lim \sum_A f(\xi_c\ \eta_k)p_k$$

Какъ мы видимъ, сначала пишутъ два знака интеграта *). Затѣмъ пишутъ произведеніе данной функціи $f(x, y)$ на символъ de . Этотъ символъ долженъ обозначать площадь произвольно взятои элементарной площадки. Вмѣсто него можно написать и всякіи инои, какой кому нравится, символъ. Можно, напримѣръ, написать и такъ

$$\iint_A f(x\ y)\ q$$

Внизу знаковъ двухъ интеграловъ обыкновенно приписываютъ символъ, который долженъ указывать, по какой площади берется двойной интегралъ. Но часто этого символа не пишутъ.

Самое же общепринятое обозначеніе двойного интеграла такое

$$\iint_A f(x\ y)\,dx\,dy,$$

гдѣ вмѣсто символа de стоитъ произведеніе двухъ дифференціаловъ. Такое обозначеніе принято, благодаря олѣдующимъ соображеніямъ.

Для построенія суммы σ мы можемъ дѣлить данную площадь A на элементарныя площадки какой угодно формы. Очевидно, что одно изъ простѣйшихъ дѣленій будетъ то дѣленіе, которое мы получимъ, если проведемъ двѣ системы прямыхъ, соотвѣтственно параллельныхъ осямъ координатъ. Тогда каждая элементарная площадка будетъ имѣть форму прямоугольника.

Пусть прямыя, перпендикулярныя къ оси x , пересѣкаютъ ее въ точкахъ (черт. ниже)

$$x_0, x_1, x_2, \ldots \quad x_k \quad x_{n-1}, x_n$$

Прямыя же, перпендикулярныя къ оси y , пусть пересѣкаютъ ее въ точкахъ

$$y_0, y_1, y \quad y_h \quad y_{m-1}\ y_m$$

Какъ всегда, полагаемъ

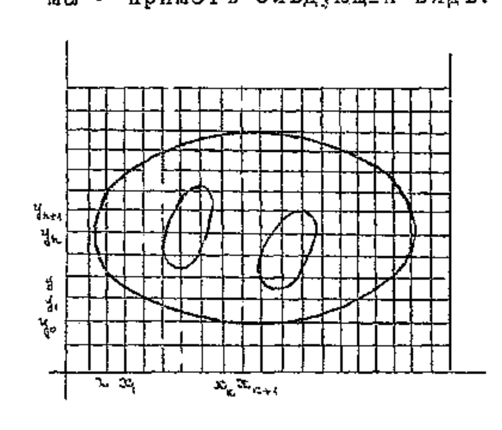
$$\Delta x_k\ x_{k+1}\ x_k \quad \Delta y_h = y_{h+1}\ y_h$$

---

*) *Почему пишутъ два знака, выяснится ниже*

Ту часть плоскости, которая заключена между прямыми, перпендикулярными къ оси x въ точкахъ x_k и x_{k+1}, условимся называть вертикальной полоской (x_k , x_{k+1}). Часть же плоскости, заключенной между прямыми, перпендикулярными къ оси y въ точкахъ y_h и y_{h+1} будемъ называть горизонтальной полоской (y_h , y_{h+1}). Обозначимъ черезъ p_{kh} площадь того элементарнаго прямоугольника, который лежитъ на пересѣченіи вертикальной полоски (x_k, x_{k+1}) и горизонтальной (y_h, y_{h+1}). Внутри его выберемъ точку, координаты которой пусть будутъ $\xi_{k,h}$ и η_{kh}. При такихъ обозначеніяхъ сумма σ приметъ слѣдующій видъ:

$$\sigma = \sum f(\xi_{kh}, \eta_{kh})\, p_{kh},$$



причемъ въ правой части мы беремъ площадь всего элементарнаго прямоугольника, если онъ внутренній, и только часть его, если онъ граничный

Докажемъ теперь, что при составленіи суммы σ мы по желанію можемъ брать или отбрасывать тѣ слагаемыя, которыя относятся къ граничнымъ прямоугольникамъ.

Для этого всѣ слагаемыя суммы σ раздѣлимъ на двѣ группы

$$\sigma = \sum_{внутр.} f(\xi_{kh}\ \eta_{kh})\, p_{kh} + \sum_{гран} f(\xi_{kh}\ \eta_{kh})\, p_{kh} \qquad (1)$$

Въ первую группу мы собираемъ слагаемыя, относящіяся къ внутреннимъ элементарнымъ прямоугольникамъ, во вторую же - слагаемыя, относящіяся къ граничнымъ прямоугольникамъ Пусть σ' эта послѣдняя сумма:

$$\sigma' = \sum_{гран} f(\xi_{kh}\ \eta_{kh})\, p_{kh} \qquad (2)$$

причемъ не надо забывать, что въ каждомъ слагаемомъ этой суммы подъ символомъ p_{kh} надо разумѣть только ту часть площади граничнаго прямоугольника, которая въ то же время принадлежитъ и данной площади A

Легко было бы доказать, что въ предѣлѣ сумма σ' равна нулю. Но мы докажемъ болѣе общую лемму. Пусть

$$\sigma'' = \sum_{гран} f(\xi_{kh}\ \eta_{kh})\, q_{kh} \qquad (3)$$

гдѣ слагаемыя суммы составлены слѣдующимъ образомъ отъ всякаго

какого-нибудь граничнаго прямоугольника p_{kh} мы беремъ совершенно произвольно нѣкоторую часть его, площадь которои обозначимъ черезъ q_{kh}. Эту величину q_{kh} мы умножимъ на значеніе функціи въ какои нибудь точкѣ граничнаго прямоугольника p_{kh}, конечно, въ такой точкѣ, которая въ то же время принадлежитъ и данной площади A. Получимъ произведеніе $f(\xi_{kh}, \eta_{kh})q_{kh}$. Сумма всѣхъ подобныхъ произведеній, которыя мы получимъ, если переберемъ всѣ граничные прямоугольники, и есть сумма σ''.

Пусть теперь M наибольшее значеніе абсолютнои величины данной функціи на всеи площади A. Слѣдовательно, всегда

$$\left|f(\xi_{kh}, \eta_{kh})\right| \leq M \qquad (4)$$

Такъ какъ абсолютная величина суммы равна или меньше суммы абсолютныхъ величинъ слагаемыхъ, то изъ (3) имѣемъ

$$\left|\sigma''\right| \leqq \sum \left|f(\xi_{kh}, \eta_{kh})\right| q_{kh}$$

Принимая же во вниманіе неравенство (4), мы получаемъ неравенство

$$\left|\sigma''\right| \leqq M \sum q_{kh}, \qquad (5)$$

или

$$\left|\sigma''\right| \leqq M q' \qquad (6)$$

гдѣ q' сумма площадеи нѣкоторыхъ частей граничныхъ прямоугольниковъ. Мы знаемъ, что сумма площадей всѣхъ граничныхъ прямоугольниковъ въ предѣлѣ равна нулю, а потому

$$\lim \sigma'' = 0$$

Очевидно, что сумма q' есть частный случай суммы σ''. Слѣдовательно,

$$\lim \sigma'' = 0 \qquad (7)$$

Возвратимся теперь къ равенству (1), которое перепишемъ въ такои формѣ:

$$\sigma = \sum_{\text{внутр}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh} + \sigma''$$

Благодаря (7), мы видимъ, что

$$\iint_A f(x, y)\,d\sigma = \lim \sum_{\text{внутр}} f(\xi_{kh}, \eta_{kh}) p_{kh} \qquad (8)$$

Слѣдовательно, при вычисленіи предѣла суммы σ мы можемъ не принимать во вниманіе граничныхъ элементарныхъ прямоугольниковъ.

Но такъ какъ предѣлъ суммы σ тоже равенъ нулю, то ясно, что вмѣсто равенства (8), мы можемъ написать также равенство

$$\iint_A f(x,y)de = \lim\left[\sum_{вн} f(\xi_{kh}\ \eta_{kh})p_{kh} + \sum f(\xi_{kh},\eta_{kh})\, q_{kh}\right]$$

Получаемъ теорему: ПРИ ВЫЧИСЛЕНІИ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА КАКЪ ПРЕДѢЛА СУММЫ, МЫ МОЖЕМЪ ПРИ СОСТАВЛЕНІИ СУММЫ ИЛИ СОВСѢМЪ ПРЕНЕБРЕГАТЬ ГРАНИЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ПРЯМОУГОЛЬНИКАМИ, ИЛИ МОЖЕМЪ ВМѢСТО КАЖДАГО БРАТЬ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ЧАСТЬ ЕГО.

Замѣтивъ это, при составленіи суммы σ примемъ во вниманіе только внутренніе прямоугольники. Имѣемъ

$$\iint_A f(x\ y)de = \lim\sum_{внутр} f(\xi_{kh}\ \eta_{kh})p_{kh}$$

Но геометрически ясно, что площадь прямоугольника p_{kh} опредѣлится по слѣдующей формулѣ

$$p_{kh} = (x_{k+1} - x_k)(y_{h+1} - y_h) = \Delta x_k \Delta y_h$$

а потому

$$\iint_A f(x\ y)de = \lim\sum_{вн} f(\xi_{kh},\eta_{kh})\Delta x_k \Delta y_h \qquad (9)$$

До сихъ поръ мы предполагали, что система прямыхъ линій проведена какъ угодно, подъ единственнымъ условіемъ, что прямыя каждой системы параллельны соотвѣтствующей оси координатъ. Мы теперь предположимъ, что всѣ прямыя каждой системы находятся на равномъ разстояніи другъ отъ друга. Въ такомъ случаѣ всѣ разности

$$\Delta x_0 \quad \Delta x_1 \quad \Delta x_2 \qquad\qquad \Delta x_{n-1}$$

равны между собой, и общую величину ихъ мы можемъ обозначить однимъ и тѣмъ же символомъ Δx.

Точно также мы обозначимъ однимъ и тѣмъ же символомъ Δy общую величину теперь равныхъ между собой разностей

$$\Delta y_0 \quad \Delta y_1 \quad \Delta y_2, \qquad\qquad \Delta y_{m-1}$$

Теперь равенство (9) перепишется въ такой формѣ:

$$\iint_A f(x\ y)de = \lim\sum_{вн} f(\xi_{kh}\ \eta_{kh})\Delta x \Delta y$$

Если же мы вмѣсто символовъ Δx, Δy, какъ символовъ произвольныхъ приращеній, напишемъ символы dx, dy, то получимъ

$$\iint_A f(x\ y)de = \lim\sum_{вн} f(\xi_{kh}\ \eta_{kh})dx\, dy$$

Короче же это равенство можно переписать въ такой формѣ

$$\iint f(x,y)de = \lim\sum f(x\ y)dx\,dy$$

что надо читать такъ. двоиной интегралъ есть предѣлъ суммы, слагаемыя котсрой типа $f(x, y)\,dx\,dy$

Поэтому то двойной интегралъ и обозначаютъ обыкновенно символомъ

$$\iint_{A} f(x\ y)\,dx\,dy$$

ООНОВНЫЯ СВОЙОТВА ДВОЙНЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

Разсмотримъ основныя свойства двоиныхъ интеграловъ. Эти свойства оказываются вполнѣ аналогичными свойствамъ обыкновенныхъ интеграловъ. Приступая къ доказательству ихъ, мы предварительно условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ

Мы предположимъ, что намъ дана нѣкоторая площадь A, ограниченная однимъ или нѣсколькими контурами C, C C_2. Воображаемъ, что данная площадь раздѣлена на какія-нибудь элементарныя площадки p_1, p_2, p_3, ... Внутри каждой площадки p_k выбираемъ произвольно точку, координаты которой пусть будутъ ξ_k, η_k. Тогда по опредѣленію

$$\iint_{A} f(x\ y)\,dx\,dy = \lim \Sigma f(\xi_k\ \eta_k)\,p_k \qquad (1)$$

Основныя свойства двойного интеграла выражаются въ слѣдующихъ теоремахъ.

1. ТЕОРЕМА. ЕСЛИ A ПЛОЩАДЬ ТОЙ ЧАСТИ ПЛОСКОСТИ, ПО КАКОЙ БЕРЕТСЯ ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛЪ, ТО

$$\iint_{A} dx\,dy = A \qquad (2)$$

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что въ равенствѣ (1) функція $f(x, y)$ тожественно равна единицѣ. Имѣемъ:

$$\iint_{A} dx\,dy = \lim \Sigma p_c \qquad (3)$$

Но на какія бы элементарныя площадки ни была раздѣлена площадь A, всегда

$$\Sigma p_k = A$$

а потому

$$\lim \Sigma p_k\ A$$

2. ТЕОРЕМА. ВНУТРИ ПЛОЩАДИ A ВСЕГДА ЕСТЬ НѢКОТОРАЯ ТАКАЯ ТОЧКА, СЪ КООРДИНАТАМИ ξ, η, ЧТО

$$\iint_{A} f(x, y\ dx\,dy = f(\xi, \eta)\,A \qquad (4)$$

Обозначимъ черезъ M и m наибольшее и наименьшее изъ

всѣхъ тѣхъ значеній, которыя данная функція $f(x, y)$ можетъ принимать на площади A. Слѣдовательно, при всякомъ k

$$m\, p_k \leq f(\xi_k, \eta_k)\, p_k < M\, p_k$$

а потому

$$m \sum p_k \leq \sum f(\xi_k, \eta_k)\, p_k \leq M \sum p_k$$

или

$$mA < \sum f(\xi_k, \eta_k)\, p_k < MA$$

Переходя къ предѣлу получаемъ

$$mA \leq \iint_A f(x, y)\, dx\, dy - MA$$

Слѣдовательно мы можемъ написать равенство

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = qA. \qquad (5)$$

гдѣ q неизвѣстная намъ величина, промежуточная между m и M. Но непрерывная функція принимаетъ всѣ значенія промежуточныя между ея наименьшимъ и наибольшимъ значеніями. Слѣдовательно должны быть такія значенія ξ и η, что

$$q = f(\xi, \eta)$$

Вставляя это выраженіе для q въ равенство (5), получаемъ теорему. Ей въ теоріи обыкновенныхъ интеграловъ соотвѣтствуетъ теорема о среднемъ значеніи интеграла

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b - a)$$

3. Теорема. Постоянный множитель можно выносить за знакъ двойного интеграла.

$$\iint_A C f(x, y)\, dx\, dy = C \iint_A f(x, y)\, dx\, dy \qquad (6)$$

Чтобы умножить сумму на какую-нибудь величину, надо помножить на эту величину каждое слагаемое. Поэтому если C – постоянная величина, то

$$\sum C f(\xi_k, \eta_k)\, p_k = C \sum f(\xi_k, \eta_k)\, p_k$$

переходя къ предѣлу, получимъ равенство (6).

4. Теорема. Интегралъ суммы равенъ суммѣ интеграловъ

$$\iint_A [\varphi(x, y) \pm \psi(x, y)]\, dx\, dy = \iint_A \varphi(x, y)\, dx\, dy \pm \iint_A \psi(x, y)\, dx\, dy$$

Въ самомъ дѣлѣ, всегда справедливо равенство

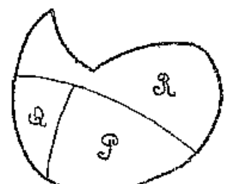
$$\sum [\varphi(\xi_k, \eta_k) \pm \psi(\xi_k, \eta_k)]\, p_k = \sum \varphi(\xi_k, \eta_k)\, p_k \pm \sum \psi(\xi_k, \eta_k)\, p_k$$

Переходя къ предѣлу, получимъ теорему.

5. ТЕОРЕМА. ИНТЕГРАЛЪ, ВЗЯТЫЙ ПО ВСЕЙ ПЛОЩАДИ, РАВЕНЪ СУММѢ ИНТЕГРАЛОВЪ ПО ВСѢМЪ ЧАСТЯМЪ, НА КОТОРЫЯ РАЗБИТА ДАННАЯ ПЛОЩАДЬ:

$$\iint\limits_{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}+\mathfrak{R}} f(x,y)\,dy\,dx = \iint\limits_{\mathfrak{P}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathfrak{Q}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathfrak{R}} f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (7)$$

Вообразимъ, что данная площадь $\mathfrak{A}$ раздѣлена на нѣкоторое число частей например, на три части $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{R}$



Дѣлимъ всю площадь $\mathfrak{A}$ на элементарныя площадки и составляемъ сумму

$$\sigma = \sum_{\mathfrak{A}} f(\xi_k, \eta_k) p.$$

гдѣ индексъ $\mathfrak{A}$ показываетъ, что надо взять слагаемыя, относящіяся ко всѣмъ элементарнымъ площадкамъ. Мы теперь раздѣлимъ слагаемыя суммы σ на три группы Въ одну группу отнесемъ тѣ слагаемыя въ которыя входятъ всѣ элементарныя площадки, принадлежащія части плоскости $\mathfrak{P}$ Другую группу дадутъ слагаемыя соотвѣтствующія площадкамъ части плоскости $\mathfrak{Q}$ Наконецъ слагаемыя, составленныя съ помощью площадокъ части $\mathfrak{R}$, намъ дадутъ третью группу Полученныя суммы мы можемъ обозначить такъ:

$$\sum_{\mathfrak{P}} f(\xi_k, \eta_k) p_k \quad \sum_{\mathfrak{Q}} f(\xi_k, \eta_k) p_k \quad \sum_{\mathfrak{R}} f(\xi_k, \eta_k) p_k$$

Очевидно, что справедливо равенство

$$\sum_{\mathfrak{A}} f(\xi_k, \eta_k) p_k = \sum_{\mathfrak{P}} f(\xi_k, \eta_k) p_k + \sum_{\mathfrak{Q}} f(\xi_k, \eta_k) p_k + \sum_{\mathfrak{R}} f(\xi_k, \eta_k) p_k$$

Переходя къ предѣлу, получимъ равенство (7) и теорема доказана Она аналогична слѣдующей теоремѣ въ теоріи обыкновенныхъ интеграловъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ГЛАВА X ВЫЧИСЛЕНІЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Установивъ понятіе о двойныхъ интегралахъ и изучивъ основныя ихъ свойства, мы разсмотримъ теперь нѣкоторые методы ихъ вычисленія

ЛЕММА О ПРЕДѢЛѢ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ

Пусть $f(x)$ данная функція, непрерывная на интервалѣ

(a, b), и пусть (a', b') интервалъ, лежащій внутри интервала (a, b)

Выбравъ между a' и b' промежуточныя числа x_k и ξ_k, построимъ интегральную сумму s для интервала (a', b')

$$s = f(\xi_0)(a'-x_1)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+f(\xi_2)(x_3-x_2)+\dots+f(\xi_{n-1})(b'-x_{n-1}).$$

Спрашивается, чему равенъ предѣлъ этой суммы, если при переходѣ къ предѣлу, не только число промежуточныхъ чиселъ x_k безконечно возрастаетъ такъ что промежутки между ними безконечно умаляются, но, кромѣ того, a' и b' приближаются соотвѣтственно къ a и b, какъ къ своимъ предѣламъ

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, одновременно съ интегральной суммой s, построенной для интервала (a', b'), будемъ разсматривать также интегральную сумму S, построенную для всего интервала (a, b).

За точки дѣленія интервала (a, b) примемъ точки a' и b', и тѣ точки x_k, которыя уже служили точками дѣленія интервала (a', b').

a a' x_1 x_2 x_3 … x_n b' b

Ясно, что при такомъ выборѣ точекъ дѣленія мы можемъ представить сумму S въ слѣдующемъ видѣ:

$$S = f(a)(a'-a)+f(\xi_0)(x_1-a')+f(\xi_1)(x_2-x_1)+\dots+f(\xi_n)(b'-x_n)+f(b')(b-b')$$

и немедленно же усматриваемъ, что

$$S = f(a)(a'-a)+s+f(b')(b-b')$$

или

$$\sum_a^b f(x)dx = f(a)(a'-a)+\sum_{a'}^{b'} f(x)dx+f(b')(b-b')$$

Переходимъ къ предѣлу. Такъ какъ по допущенію, $\lim a' = a$, $\lim b' = b$, то

$$\lim \sum_{a'}^{b'} f(x)\,dx = \lim \sum_a^b f(x)\,dx$$

а потому

$$\lim \sum_{a'}^{b'} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Это равенство и даетъ ту лемму, которую мы хотѣли доказать Слѣдовательно

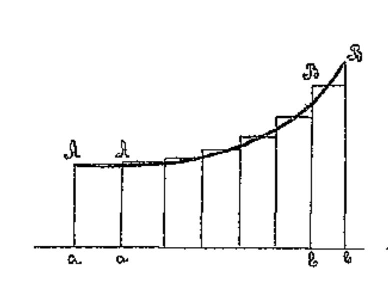
ЕСЛИ ПРЕДѢЛЫ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ ВЪ СВОЮ ОЧЕРЕДЬ ИЗМѢНЯЮТСЯ, КАЖДЫЙ СТРЕМЯСЬ КЪ СВОЕМУ ПРЕДѢЛУ, ТО ПРЕДѢЛЪ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ РАВЕНЪ ОПРЕДѢЛЕННОМУ ИНТЕГРАЛУ, ПРЕДѢЛЫ КОТОРАГО РАВНЫ СООТВѢТ-

ственнымъ предѣламъ интегральной суммы.

Короче же и, быть можетъ, яснѣе эту лемму можно формулировать такъ если $\lim a' = a$, $\lim b' = b$, то

$$\lim \sum_{a'}^{b'} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Очень простъ геометрическій смыслъ этой леммы. Сумма s' есть не что иное, какъ сумма площадей всѣхъ элементарныхъ прямоугольниковъ, построенныхъ для трапеціи $a'A'B'b'$. Ясно, чѣмъ уже элементарные прямоугольники и чѣмъ ближе a' и b' соотвѣтственно къ a и b, тѣмъ меньше разность между s' и площадью трапеціи $aABb$. Слѣдовательно, предѣлъ суммы s' равенъ площади трапеціи $aABb$. Какъ разъ это и утверждаетъ лемма



Когда предѣлы a' и b' интегральной суммы

$$s' = \sum_{a'}^{b'} f(x)dx$$

въ свою очередь стремятся къ a и b, какъ къ своимъ предѣламъ, то мы, менѣе точно, будемъ обозначать эту сумму s' такъ

$$s' = \sum_{a}^{b} f(x)dx$$

При такомъ обозначеніи доказанная лемма выражается равенствомъ

$$\lim \sum_{a}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

который имѣетъ ту же форму, какъ и въ случаѣ, когда предѣлы интегральной суммы постоянны

ПЛОЩАДЬ, КОНТУРЪ КОТОРОЙ ПЕРЕСѢКАЕТСЯ ОРДИНАТАМИ ТОЛЬКО ВЪ ДВУХЪ ТОЧКАХЪ.

Величина двойного интеграла, очевидно, зависитъ не только отъ вида подынтегральной функціи, но и отъ формы той площади, на которую онъ распространенъ

Мы начнемъ наши изслѣдованія, предполагая, что контуръ, ограничивающій площадь интеграціи, пересѣкается каждой прямой, параллельной оси y, только въ двухъ точкахъ. Такія площади назовемъ площадями перваго типа. Какъ увидимъ, вычисленіе всякаго двойного интеграла, распространеннаго на площадь произвольной формы легко приводится къ интегрированію по площадямъ этого типа.

Пусть же требуется вычислить двойной интегралъ

$$S = \iint f(x\ y)\,dx\,dy \qquad (1)$$

распространенный на площадь, ограниченную снизу и сверху кривыми AB и CD, слѣва же и справа прямыми, перпендикулярными къ оси x въ точкахъ a и b (черт. ниже).

Въ частномъ случаѣ, если точка A совпадаетъ съ точкой C, а точка B съ точкой D, мы будемъ имѣть обыкновенный замкнутый контуръ

Обозначимъ черезъ u ординату нижней кривой, черезъ v ординату верхней. Мы предполагаемъ, что каждая изъ этихъ ординатъ есть однозначная функцiя абсциссы Пусть

$$u = \varphi(x) \quad , \quad v = \psi(x) \qquad (2)$$

Чтобы получить интегральную сумму, предѣлу которой равенъ двойной интегралъ, мы должны раздѣлить площадь интеграцiи на элементарныя площадки и въ каждой изъ нихъ выбрать точку Это дѣленiе и этотъ выборъ производимъ слѣдующимъ образомъ.

Проводимъ двѣ системы прямыхъ, - систему прямыхъ, перпендикулярныхъ къ оси x и пересѣкающихъ ее въ точкахъ

$$x_0, x_1\ \ x_2, x_3 \quad \dots \quad x_k \ \dots \quad x_n$$

Значенiя ординатъ u и v въ этихъ точкахъ обозначимъ соотвѣтственно символами:

$$\begin{matrix} u & u_2 & u_3 & & u_k, & & u_n \\ v & v_2 & v_3 & & v_k & & v_n \end{matrix}$$

Слѣдовательно, вообще

$$u_k = \varphi(x_k) \qquad v_k = \psi(x_k) \qquad (3)$$

Прямыя второй системы, перпендикулярныя къ оси y, пусть пересѣкаютъ ее въ точкахъ:

$$y_1\ y_2, \quad \dots \quad y_h, \qquad y_m$$

Через p_{kh} мы обозначимъ площадь того элементарнаго прямоугольника, который одновременно принадлежитъ и вертикальной полосѣ (x_k , x_{k+1}) и горизонтальной (y_h , y_{h+1}). Въ немъ отмѣтимъ точку съ координатами x_k и y_h Это будетъ та изъ его вершинъ, которая лежитъ лѣвѣе и ниже всѣхъ остальныхъ. Ясно что

$$p_{kh} = (x_{k+1} - x_k)(y_{h+1} - y_h) = \Delta x_k \Delta y_h.$$

Умножимъ p_{kh} на значенiе функцiи въ выбранной точкѣ Получимъ произведенiе

$$f(x_k\ y_h)\,p_{kh} = f(x_k\ y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h$$

Про это произведенiе будемъ говорить, что оно принадлежитъ прямо-

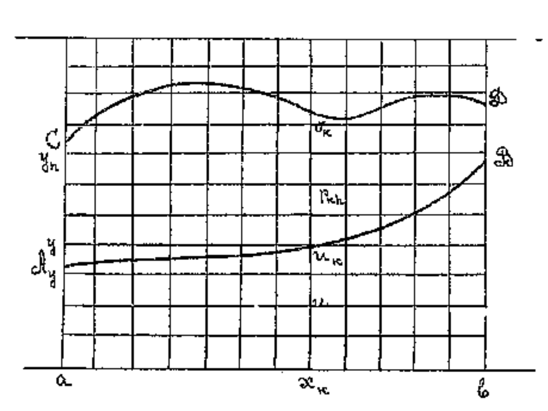
угольнику p_{kh}

Если подобныя произведенія мы составимъ для каждаго элементарнаго прямоугольника, то сумма ихъ всѣхъ дастъ намъ интегральную сумму, которую обозначимъ черезъ S Слѣдовательно

$$S = \sum f(x_k, y_h) \Delta x_k \Delta y_h \qquad (4)$$

При этомъ мы будемъ принимать во вниманіе только внутренніе элементарные прямоугольники, граничные же отбросимъ. На это, какъ мы видѣли, мы имѣемъ право.

Наша задача заключается въ вычисленіи предѣла суммы S Для этого мы предварительно сгруппируемъ ея слагаемыя въ отдѣльныя группы слѣдующимъ образомъ въ одну и ту же группу мы соединяемъ всѣ тѣ слагаемыя, и только, которыя составлены съ помощью элементарныхъ прямоугольниковъ, лежащихъ въ одной и той же вертикальной полоскѣ. Такихъ группъ будетъ, очевидно, столько же, сколько всѣхъ вертикальныхъ полосокъ.



Мы обозначимъ черезъ S_k сумму всѣхъ тѣхъ слагаемыхъ, которыя принадлежатъ прямоугольникамъ, лежащимъ въ вертикальной полоскѣ (x_k , x_{k+1}) и запишемъ это такъ

$$S_k = \sum_{(x_k, x_{k+1})} f(x_k, y_h) \Delta x_k \Delta y_h , \qquad (5)$$

гдѣ символъ полоски служитъ индексомъ у символа суммы

Мы будемъ сокращенно говорить, что каждая сумма S_k получается суммированіемъ вдоль соотвѣтствующей вертикальной полосы. Такъ какъ ясно что сумма S равна суммѣ всѣхъ суммъ S_k , то напишемъ

$$S = \sum S_k \qquad (6)$$

Этотъ переходъ отъ суммъ S_k къ суммѣ S мы условно будемъ называть суммированіемъ полосъ. Слѣдовательно, чтобы получить сумму S , мы должны сначала просуммировать ея слагаемыя вдоль каждой вертикальной полосы, а потомъ взять сумму всѣхъ полосъ.

Принимая во вниманіе значеніе символовъ S и S_k , мы перепишемъ равенство (6) въ такомъ видѣ:

$$\sum f(x_k\ y_h)p_{kh}=\sum\left(\sum_{(x_k,x_{k+1})} f(x_k\ y_h)\Delta x_k\Delta y_h\right) \qquad (7)$$

Разсмотримъ внимательнѣй внутреннюю сумму, т.е. сумму

$$s_k\ \sum_{(x_k,x_{k+1})} f(x_k\ y_h)\Delta x_k\Delta y_h \qquad (8)$$

Такъ какъ слагаемыя этой суммы относятся къ прямоугольникамъ, лежащимъ въ одной и той же вертикальной полоскѣ, то во всѣхъ этихъ слагаемыхъ x_k и Δx_k одни и тѣ же. Поэтому Δx_k, какъ общій множитель, можетъ быть вынесенъ за знакъ суммы

$$s_k=\left\{\sum_{(x_k,x_{k+1})} f(x_k\ y_h)\Delta y_h\right\}\Delta x_k \qquad (9)$$

но числа y_h въ каждомъ слагаемомъ различны. При этомъ не трудно видѣть, что не все числа

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_m$$

входятъ въ слагаемыя суммы s_k, но только тѣ изъ нихъ, которыя промежуточны между u_k и v_k. Чтобъ не забывать этого мы можемъ записать, что

$$s_k=\left\{\sum_{u_k}^{v_k} f(x_k\ y_h)\Delta y_h\right\}\Delta x_k$$

Теперь равенство(7) перепишется такъ

$$\sum f(x_k\ y_h)p_{kh}=\sum\left\{\sum_{u_k}^{v_k} f(x_k\ y_h)\Delta y\ \right\}\Delta x_k \qquad (10)$$

При переходѣ къ предѣлу всѣ Δx_k и Δy_h безконечно умаляются. Если же мы для ясности представимъ равенство(10) въ такомъ видѣ

$$\sum f(x_k\ y_h)p_{kh}=\sum \beta_k\Delta x_k \qquad (11)$$

гдѣ, слѣдовательно,

$$\beta_k=\sum_{u_k}^{v_k} f(x_k\ y_h)\Delta y_h, \qquad (12)$$

то становится очевиднымъ, что β_k есть факторъ при Δx_k. Но при переходѣ къ предѣлу всякій факторъ можно замѣнить предѣльно-равной ему величиной. Ищемъ же, чему предѣльно-равенъ факторъ β_k.

Если въ функціи двухъ перемѣнныхъ мы замѣнимъ x черезъ x_k, то она обратится въ функцію одного перемѣннаго. Пусть на время

$$f(x_k\ y)=\varphi(y) \qquad (13)$$

При такомъ обозначеніи

$$\beta_k=\sum_{u_k}^{v_k}\varphi(y_h)\Delta y_h \qquad (14)$$

Пусть $\qquad y_p\quad y_{p+1}\quad y_{p+2}\quad \ldots\quad y_q$

всѣ тѣ числа, промежуточныя между u_k и v_k, которыя входятъ въ правую часть (14). Болѣе точно мы должны бы были написать такъ

$$\beta_k = \sum_{y_p}^{y_q} \varphi(y_h)\Delta y_h$$

Но такъ какъ ясно, что въ предѣлѣ разности

$$y_p - u_k \quad \text{и} \quad v_k - y_q$$

равны нулю, то мы удержимъ обозначенія (14).

Согласно съ леммой о предѣлѣ интегральной суммы, предѣлы которой мѣняются, мы заключаемъ, что

$$\lim \beta_k \int_{u_k}^{v_k} \varphi(y)dy = \int_{u_k}^{v_k} f(x_r\ y)dy$$

и такъ какъ всякая величина предѣльно-равна своему предѣту, то*)

$$\beta_k \equiv \int_{u_k\ \xi(x_k)}^{v_k = \psi(x_k)} f(x_k, y)dy \qquad (15)$$

Возвращаемся къ равенству (10). Замѣняя каждый факторъ при Δx_k его предѣломъ, имѣемъ

$$\lim \sum f(x_k\ y_h)p_{kh} - \lim \sum\left\{\lim \sum_{u_k}^{v_k} f(x_k\ y_h)\Delta y_h\right\}\Delta x_k,$$

а потому, принимая во вниманіе (15),

$$\lim \sum f(x_c\ y_h)p_{kh} - \lim \sum\left\{\int_{u_k}^{v_k} f(x_k, y)dy\right\}\Delta x_k \qquad (16)$$

Когда мы функцію $f(x, y)$ проинтегрируемъ по y между предѣлами, зависящими отъ x, то получимъ функцію только одного x. Пусть на время

$$\int_{u=\xi(x)}^{v\ \psi(x)} f(x\ y)dy = \omega(x) \qquad (17)$$

При такомъ обозначеніи равенство (16) принимаетъ видъ

$$\lim \sum f(x_k\ y_h)p_{kh} = \lim \sum \omega(x_k)\Delta x_k$$

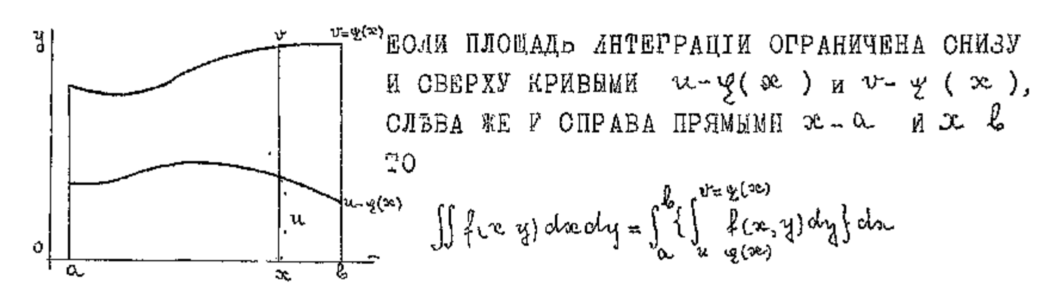
Но въ правой части числа x_k промежуточны между a и b. Слѣдовательно

$$\lim \sum f(x_k, y_h)p_{kh} = \int_a^b \omega(x)dx$$

Замѣняя здѣсь функцію $\omega(x)$ ея выраженіемъ изъ (17) и зная, что лѣвая часть есть искомый двойной интегралъ, получимъ теорему.

---

*) *Знакъ „≡" читается* *предѣльно-равно*.



ЕСЛИ ПЛОЩАДЬ ИНТЕГРАЦІИ ОГРАНИЧЕНА СНИЗУ И СВЕРХУ КРИВЫМИ $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$, СЛѢВА ЖЕ И СПРАВА ПРЯМЫМИ $x=a$ и $x=b$ ТО

$$\iint f(x\,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big\{ \int_{u=\varphi(x)}^{v=\psi(x)} f(x,y)\,dy \Big\}\,dx$$

Мы видимъ, чтобы получить двойной интегралъ, надо надъ подынтегральной функціей произвести два простыхъ интегрированія, сначала по y, потомъ по x. Поэтому то для обозначенія двойного интеграла обыкновенно пишутъ два знака интеграла.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что первое интегрированіе по y производится между предѣлами, зависящими отъ x. Второе же интегрированіе по x происходитъ уже между постоянными предѣлами

Что касается самого доказательства теоремы, то по идеѣ оно чрезвычайно просто и можетъ быть изложено въ нѣсколькихъ строкахъ, если отбросить объясненія различныхъ обозначеній. Въ самомъ дѣлѣ:

Пользуясь правомъ группировать слагаемыя въ различныя группы, мы имѣемъ очевидное равенство:

$$\sum f(x_k\,y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h = \sum \Big\{ \sum_{u_k}^{v_k} f(x_k\,y_h)\,\Delta y_h \Big\} \Delta x_k, \qquad (18)$$

а потому

$$\lim \sum f(x_k\,y_h)\,\Delta x_k \Delta y_h = \lim \sum \Big\{ \lim \sum_{u_k}^{v_k} f(x_k\,y_h)\,\Delta y_h \Big\} \Delta x_k$$

и такъ какъ каждая сумма въ предѣлѣ обращается въ соотвѣтствующій интегралъ, то сначала имѣемъ:

$$\iint f(x\,y)\,dx\,dy = \lim \sum \Big\{ \int_{u_k}^{v_k} f(x_k\,y)\,dy \Big\} \Delta x_k,$$

а потому окончательно

$$\iint f(x\,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big\{ \int_u^v f(x\,y)\,dy \Big\}\,dx \qquad (19)$$

Сравнивая это равенство съ (18), мы видимъ, что интегрированіе по y соотвѣтствуетъ суммированію вдоль полосъ, а интегрированіе по x суммированію полосъ.

Эта связь становится еще яснѣе, если мы въ равенствѣ (18) опустимъ индексы у промежуточныхъ чиселъ. Тогда въ сжатомъ видѣ

все доказательство может быть изложено в слѣдующихъ двухъ строкахъ такъ какъ

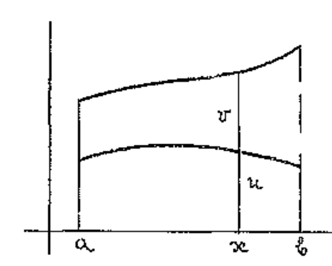
$$\sum f(x\,y)\,\Delta x\,\Delta y \quad \sum\left\{\sum f(x\,y)\,\Delta y\right\}\Delta x \tag{20}$$

то въ предѣлѣ

$$\iint f(x\,y)\,dx\,dy - \int_a^b\left\{\int_u^v f(x\,y)\,dy\right\}dx \tag{21}$$

и теперь до чрезвычайности ясно какъ каждая сумма въ предѣлѣ замѣняется соотвѣтствующимъ интеграломъ.

При практическомъ вычисленіи всегда надо обращать тщательное вниманіе на правильное установленіе предѣловъ каждаго интеграла. Для этого полезно рисовать себѣ слѣдующую картину воображаемъ площадь интеграціи раздѣленной на элементарныя площадки



мысленно затѣмъ выдѣляемъ одну какую-нибудь вертикальную полосу, лѣвая сторона которой пересѣкаетъ ось x въ нѣкоторой, произвольно взятой, точкѣ x. Мы воображаемъ, что полоски настолько тонки, что ширина ихъ не превышаетъ ширины чернильной черты. Слѣдовательно, начертить правую сторону полосы фактически нельзя, потому что она должна на чертежѣ слиться съ лѣвой стороной. Поэтому ордината въ точкѣ x изображаетъ, такъ сказать, всю полоску.

Интегрированіе по y соотвѣтствуетъ суммированію вдоль полоски. Поэтому чтобы установить предѣлы при интегрированіи по y, мы смотримъ въ какихъ предѣлахъ измѣняется y, если мы будемъ итти вдоль произвольно взятой ординаты Ясно, что y будетъ измѣняться отъ ординаты u нижней кривой до ординаты v верхней кривой. Это и будутъ предѣлы при первомъ интегрированіи по y, причемъ эти предѣлы являются функціями x

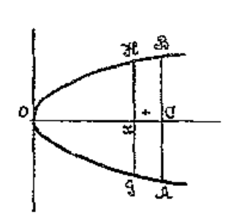
Чтобы найти предѣлы интеграла по x, мы смотримъ, въ какихъ предѣлахъ надо измѣнять x чтобы получить всѣ полоски.
Пусть например, требуется вычислить двойной интегралъ

$$G = \iint x y^{2}\,dx\,dy \tag{22}$$

распространенный на площадь $AOBC$, ограниченную дугою параболы $y^2\ 3x$

и хордой AB, пересѣкающей ось x въ точкѣ $x - +1$

Когда мы идемъ по какои нибудь вертикальнои полосѣ $\mathcal{G}\mathcal{H}$, абсцисса которой x, то y мѣняется отъ $-\sqrt{3x}$ до $+\sqrt{3x}$. Это и будутъ предѣлы интегрированія по y. Предѣлы же интегрированія по x будутъ 0 и 1, потому что въ этихъ предѣлахъ надо измѣнять x, чтобы получить всѣ вертикальныя полосы. Слѣдовательно



$$\iint_{AOB} xy^2 dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{3x}}^{\sqrt{3x}} xy^2 dy \right\} dx$$

Вычисляя сначала внутренніи интегралъ, потомъ внѣшніи, найдемъ, что

$$\iint_{AOB} xy^2 dx dy = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

ПЛОЩАДЬ, КОНТУРЪ КОТОРОЙ ВСЯКОИ АБСЦИССОЙ ПЕРЕСѢКАЕТСЯ ТОЛЬКО ВЪ ДВУХЪ ТОЧКАХЪ

Пусть площадь интеграціи ограничена снизу и сверху прямыми

$$y = \alpha \quad \text{и} \quad y = \beta$$

слѣва и справа кривыми, уравненія которыхъ

$$u = \lambda(y) \qquad v = \mu(y),$$

гдѣ u абсцисса лѣвой, а v - абсцисса правои кривои. Такую площадь назовемъ площадью второго типа (Черт. ниже)

Рассматриваемый случай, очевидно, отличается отъ предыдущаго тѣмъ, что x и y мѣняются ролями. Соотвѣтственно этому измѣняются и доказательство и результатъ.

Мысленно разбивъ площадь на элементарные прямоугольники и построивъ интегральную сумму

$$S = \sum f(x\ y)\,\Delta x\,\Delta y$$

мы теперь ея слагаемыя группируемъ, соединяя въ одну и ту же группу тѣ изъ нихъ, которыя соотвѣтствуютъ элементарнымъ прямоугольникамъ, лежащимъ въ однои и тои же горизонтальной полоскѣ. Если черезъ S_y обозначимъ сумму тѣхъ слагаемыхъ, которыя принадлежатъ полоскѣ, заключеннои между прямыми, ординаты которыхъ y и $y+\Delta y$, то

$$S_y = \sum' f(x\ y)\,\Delta x\,\Delta y$$

гдѣ въ правои части во всѣхъ слагаемыхъ y и Δy одни и тѣ же. По-

этому Δy можно вынести за знакъ суммы. Что же касается x, то онъ принимаетъ всѣ промежуточныя значенія между u и v *) . Слѣдовательно:

$$S_y = \left\{\sum_u^v f(x\, y)\,\Delta x\right\}\Delta y$$

и такъ какъ сумма S равна суммѣ всѣхъ суммъ S_y, то имѣемъ основное равенство

$$\sum f(x\, y)\,\Delta x\,\Delta y = \sum\left\{\sum_u^v f(x\, y)\,\Delta x\right\}\Delta y$$

Переходя къ предѣлу, заключаемъ, что

$$\lim \sum f(x\, y)\,\Delta x\Delta y = \lim \sum\left\{\lim\sum_u^v f(x\, y)\,\Delta x\right\}\Delta y$$

Замѣняя же предѣлъ каждой суммы соотвѣтствующимъ интеграломъ, послѣдовательно находимъ

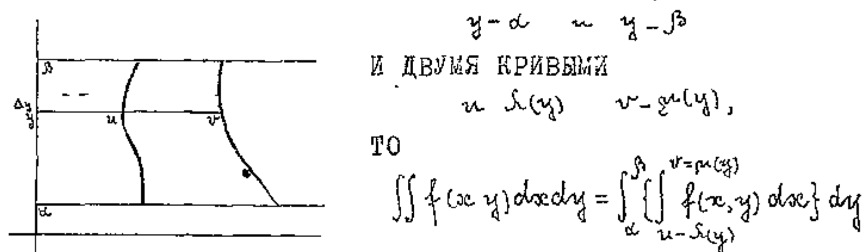
$$\iint f(x\, y)\,dx\,dy = \lim\sum\left\{\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x,y)\,dx\right\}\Delta y =$$

$$= \int_\alpha^\beta\left\{\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x\, y)\,dx\right\}dy$$

а потому имѣемъ теорему

ЕСЛИ ПЛОЩАДЬ ИНТЕГРАЦІИ ОГРАНИЧЕНА ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

$$y = \alpha \quad и \quad y = \beta$$



И ДВУМЯ КРИВЫМИ

$$u = \lambda(y) \qquad v = \mu(y),$$

ТО

$$\iint f(x\, y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta\left\{\int_{u=\lambda(y)}^{v=\mu(y)} f(x,y)\,dx\right\}dy$$

Теперь первое интегрированіе совершается по x, причемъ предѣлами интеграла служатъ функціи y. Второе интегрированіе по y производится уже между постоянными предѣлами α и β.

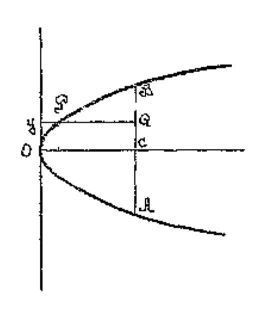
Разсмотримъ примѣръ. Мы уже вычислили интегралъ (стр. 155)

$$S = \iint_{AOB} x y^2\,dx\,dy$$

распространенный на площадь, ограниченную параболой $y^2 = 3x$ и пря-

*) Теперь u и v абсциссы

мой x 1 При этомъ первое интегрированіе мы производили по y, второе по x Но контуръ этой площади всякой прямой, параллельной оси x, пересѣкается только въ двухъ точкахъ. Поэтому мы можемъ произвести первое интегрированіе по x, второе по y Мысленно выдѣляемъ какую нибудь горизонтальную полоску PQ, ордината которой y Когда мы идемъ по этой полоскѣ, то x мѣняется отъ абсциссы точки P до абсциссы точки Q. Слѣдовательно, первое интегрированіе по x мы должны произвести между предѣлами $\frac{y^2}{3}$ и $+1$



Чтобы получить всѣ горизонтальныя полосы, мы должны измѣнять y отъ ординаты точки A до ординаты точки B Поэтому второе интегрированіе по y мы должны произвести между предѣлами $-\sqrt{3}$ и $+\sqrt{3}$. Слѣдовательно, имѣемъ

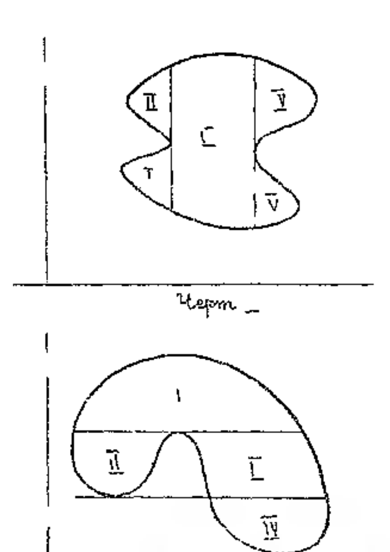
$$\iint\limits_{AOB} xy^2dx\,dy = \int_{\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}}\left\{\int_{\frac{y^2}{3}}^{+1} xy^2dx\right\}dy - \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

Два различные способа вычисленія двойного интеграла дали, какъ и должно было ожидать, одинъ и тотъ же результатъ

ПЛОЩАДЬ ИНТЕГРАЦІИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ.

Имѣя формулы для вычисленія интеграла по площадямъ перваго и второго типа, мы можемъ вычислить двойной интегралъ, распространенный на площадь произвольной формы, и можемъ это сдѣлать двумя способами

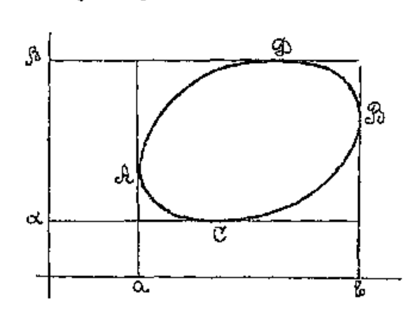
Мы можемъ раздѣлить всякую площадь прямыми параллельными оси y, на нѣсколько площадей перваго типа Такъ, напримѣръ, площадь на черт. 1 раздѣлена на пять площадей перваго типа. Или мы можемъ прямыми, параллельными оси x, раздѣлить данную площадь на нѣсколько площадей второго типа Такъ, напримѣръ, площадь на черт 2. раздѣлена на четыре площади второго типа



Вычисливъ интегралъ на каждой части площади и взявъ потомъ ихъ сумму мы найдемъ интегралъ по всей площа

Что касается до вопроса, выгоднѣе ли дѣлить данную площадь на площади перваго или второго типа, то это зависитъ отъ вида и площади, и подынтегральной функціи. На практикѣ приходится пробовать тотъ и другой способъ и смотрѣть, который приводитъ къ болѣе простымъ вычисленіямъ.

Особаго вниманія заслуживаетъ случай когда контуръ площади пересѣкается только въ двухъ точкахъ какъ всякой прямой, параллельной оси x, такъ и всякой прямой, параллельной оси y. Пусть напримѣръ $\mathcal{ACBD}$ такой контуръ.



Проводимъ двѣ крайнія ординаты Aa и Bb, ограничивающія контуръ слѣва и справа. Пусть онѣ касаются контура въ точкахъ A и B. Мы данную площадь можемъ разсматривать, какъ площадь перваго типа. Пусть уравненіе нижней половины контура, т.е. кривой ACB, такое:

$$y = \varphi(x)$$

Уравненіе же верхней половины пусть будетъ:

$$y = \psi(x)$$

По доказанному имѣемъ

$$\iint f(x\ y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x\ y)\,dy \right\} dx \qquad (1)$$

Но, проведя крайнія абсциссы αC и βD, ограничивающія контуръ снизу и сверху, мы можемъ разсматривать данную площадь какъ площадь второго типа, которая слѣва ограничена кривой CAD а справа кривой CBD. Пусть уравненія этихъ кривыхъ соотвѣтственно будутъ:

$$x = \lambda(y) \qquad x = \mu(y)$$

По доказанному имѣемъ:

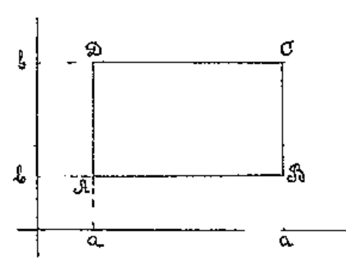
$$\iint f(x\ y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x\ y)\,dx \right\} dy \qquad (2)$$

Въ первомъ случаѣ мы должны интегрировать сначала по y потомъ по x. Во второмъ случаѣ наоборотъ, сначала по x, потомъ по y. Въ томъ и другомъ случаѣ предѣлами перваго интеграла служатъ функціи того перемѣннаго, по которому интегрируется послѣ

ПЛОЩАДЬ ИНТЕГРАЦІИ-ПРЯМОУГОЛЬНИКЪ.

Пусть площадью интеграціи служитъ прямоугольникъ $AbCD$

сторонами, параллельными осямъ координатъ. Обозначимъ черезъ a и b координаты той вершины A, которая лежитъ лѣвѣе и ниже всѣхъ остальныхъ вершинъ, координаты противоположной вершины C пусть будутъ a' и b'.



Данную площадь мы можемъ по желанію разсматривать и какъ площадь перваго типа и какъ площадь второго типа.

Разсматривая ее какъ площадь перваго типа, имѣемъ

$$\iint_{ABCD} f(x,y)\,dx\,dy \quad \int_a^{a'}\left\{\int_b^{b} f(x\ y)\,dy\right\}dx \qquad (1)$$

Примѣняя же формулу, выведенную для площади второго типа, найдемъ, что

$$\iint_{ABCD} f(x\ y)\,dx\,dy = \int_b^{b}\left\{\int_a^{a} f(x\ y)\,dx\right\}dy \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), заключаемъ, что

$$\int_b^{b}\left\{\int_a^{a'} f(x\ y)\,dx\right\}dy = \int_a^{a}\left\{\int_b^{b} f(x\ y)\,dy\right\}dx,$$

и мы получили новое доказательство теоремы объ интегрированіи по параметру.

Не мѣшаетъ обратить вниманіе на ту форму, въ которой можетъ быть представлено равенство (1) въ томъ случаѣ, когда подинтегральная функція представляется въ видѣ произведенія двухъ функцій одного перемѣннаго. Пусть

$$f(x\ y) = \varphi(x)\ \psi(y)$$

Изъ (1) имѣемъ

$$\iint_{ABCD} \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \int_a^{a}\left\{\int_b^{b} \varphi(x)\psi(y)\,dy\right\}dx$$

Во внутреннемъ интегралѣ, когда мы интегрируемъ по y, мы должны разсматривать x какъ постоянное. Поэтому $\varphi(x)$, какъ постоянный множитель, можно вынести за знакъ интеграла. Имѣемъ

$$\iint_{ABCD} \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy \quad \int_a^{a'} \varphi(x)\left\{\int_b^{b} \psi(y)\,dy\right\}dx .$$

Но интегралъ

$$\int_{b}^{b} \psi(y)\,dy$$

есть нѣкоторый постоянный множитель при $\varphi(x)$. Поэтому его мож-

но вынести за знакъ интеграла по x . Имѣемъ

$$\iint_{ABCD} \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy - \left\{\int_b \psi(y)\,dy\right\}\int_a^{a}\varphi(x)\,dx$$

Замѣняя въ первомъ интегралѣ перемѣнную интеграціи y черезъ x окончательно получаемъ:

$$\iint_{ABCD} \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \left\{\int_a^{a'}\varphi(x)\,dx\right\}\left\{\int_b^{b}\psi(x)\,dx\right\}$$

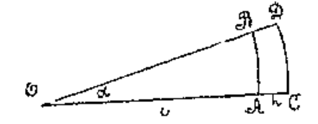
Мы видимъ, что въ этомъ весьма частномъ случаѣ двойной интегралъ равенъ произведенію двухъ обыкновенныхъ интеграловъ

ВЫЧИСЛЕНІЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА ВЪ ПОЛЯРНЫХЪ КООРДИНАТАХЪ.

Мы нашли методъ для вычисленія двойного интеграла разбивая площадь интеграціи на элементарныя площадки прямыми параллельными осямъ координатъ.

Производя разбіеніе площади на элементы иными кривыми мы получимъ новые методы для вычисленія двойныхъ интеграловъ.

Докажемъ предварительно одну лемму Пусть α уголъ между прямыми OC и OD изъ точки O какъ изъ центра, описываемъ дугу AB радіусомъ r и дугу CD радіусомъ $r+h$ Пусть u площадь фигуры $ABDC$ которую назовемъ кривымъ четыреугольникомъ; h и α назовемъ высотою и угломъ этого четыреугольника



Если уголъ α безконечно умаляется, то u тоже безконечно умаляется. Вычислимъ величину эквивалентную u . Такъ какъ площади секторовъ OAB и COD соотвѣтственно равны $\frac{1}{2}r^2\alpha$ и $1/2(r+h)^2\alpha$ то

$$u = rh\alpha + \tfrac{1}{2}h^2\alpha.$$

Предполагаемъ что h и α безконечно умаляются Такъ какъ

$$\frac{u}{rh\alpha} - 1 + \frac{h}{2r},$$

то

$$\lim \frac{u}{rh\alpha} - 1$$

Получаемъ лемму. площадь безконечно умаляющагося кривого четыреугольника эквивалентна произведенію его радіуса, высоты и угла:

$$u \approx rh\alpha$$

Пусть s длина дуги AB. Такъ какъ $s\ r\alpha$, то

$$u \approx s.h.$$

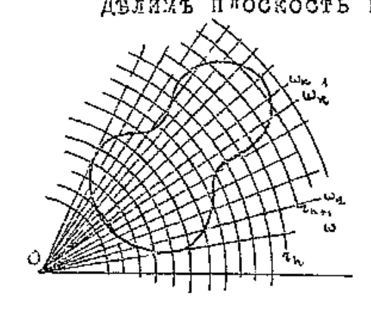
Слѣдовательно: съ точки зрѣнія эквивалентности площадь безконечно умаляющагося кривого четыреугольника можно разсматривать какъ площадь прямоугольника.

Предположимъ теперь, что мы должны вычислить двойной интегралъ

$$S = \iint f(x\ y)\,dx\,dy$$

распространенный на площадь A, ограниченную контуромъ C.

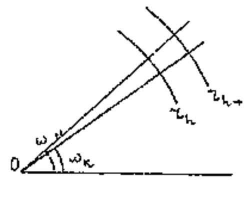
Дѣлимъ плоскость на элементарныя площадки слѣдующимъ образомъ: изъ начала координатъ проводимъ систему лучей, наклоненныхъ къ оси x подъ углами ω, ω_2, ω_3..... и строимъ систему круговъ радiусовъ r_1, r_2, r_3,... съ центромъ въ O. Всякую часть плоскости заключенную между двумя смежными лучами, наклоненными подъ углами ω_k и ω_{k+1}, назовемъ секторiальной полосой (ω_k, ω_{k+1}); часть же плоскости, лежащей между двумя смежными окружностями радiусовъ r_h и r_{h+1} назовемъ кольцомъ (r_h, r_{h+1}).



Системой лучей и круговъ плоскость раздѣляется на кривые четыреугольники. Символомъ $p_{k,h}$ обозначимъ тотъ изъ нихъ, который лежитъ одновременно въ секторiальной полосѣ (ω_k, ω_{k+1}) и кольцѣ (r_h, r_{h+1}). Въ немъ возьмемъ точку, полярныя координаты которой r_h и ω_k. Слѣдовательно, ея декартовы координаты будутъ $r_h \cos\omega_k$ и $r_h \sin\omega_k$, а потому та сумма S, предѣлу которой равенъ двойной интегралъ, представится въ такомъ видѣ

$$S = \sum f(r_h\cos\omega_k\ \ r_h\sin\omega_k)\,p_{k\,h} \qquad (1)$$

Воображаемъ, что число лучей и концентрическихъ окружностей безконечно возрастаетъ такъ, что размѣры элементарныхъ площадокъ безконечно умаляются. Тогда при вычисленiи предѣла суммы S можно каждую площадку $p_{k\,h}$ замѣнить эквивалентной ей величиной. Но если, придерживаясь обычныхъ обозначенiй мы положимъ



$$\Delta\omega_k = \omega_{k+1}\ \ \omega_k \qquad \Delta r_h - r_{h+1} - r_h$$

то, какъ мы видѣли, $p_{kh} \approx r_h \Delta\omega_k \Delta\omega_h$. Поэтому, вмѣсто (1),

мы можемъ разсматривать такую сумму.

$$s' = \sum f(r_h\cos\omega_k, r_h\sin\omega_k)r_h \Delta r_h' \Delta\omega_k \qquad (2)$$

Полагая же, для сокращенія письма,

$$f(r\cos\omega\ \ r\sin\omega)r = \varphi(r\ \omega) \qquad (3)$$

получимъ

$$s = \sum \varphi(r_h\ \ \omega_k)\,\Delta r_h \Delta\omega_k \qquad (4)$$

и предѣлъ этой суммы равенъ двойному интегралу.

Мы можемъ теперь поступить двоякимъ способомъ. Мы можемъ всѣ слагаемыя суммы s' соединить въ различныя группы, относя въ одну и ту же группу всѣ слагаемыя, соотвѣтствующія элементарнымъ площадкамъ, лежащимъ въ одномъ и томъ же кольцѣ. Пусть

$$s_h = \sum_{(r_h, r_{h+1})} \varphi(r_h\ \omega_k)\,\Delta r_h \Delta\omega_k$$

сумма той группы слагаемыхъ, которыя принадлежатъ элементарнымъ площадкамъ въ кольцѣ (r_k, r_{k+1}). Тогда очевидно, что s' равна суммѣ всѣхъ s_h.

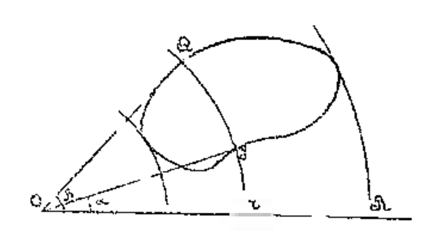
Про такой способъ группированія слагаемыхъ суммы s мы будемъ говорить, что мы сначала суммируемъ по каждому кольцу, а потомъ беремъ сумму всѣхъ колецъ. Это одинъ способъ. Но мы можемъ также предварительно соединять въ отдѣльныя группы всѣ слагаемыя, относящіяся къ элементарнымъ площадкамъ, лежащимъ въ одной и той же секторіальной полоскѣ. Каждая такая группа даетъ свою сумму и сумма всѣхъ подобныхъ суммъ намъ дастъ сумму s'

Про этотъ способъ мы будемъ говорить, что мы суммируемъ сначала по секторіальнымъ полоскамъ, а потомъ беремъ сумму ихъ всѣхъ.

Тотъ и другой способъ, послѣ перехода къ предѣлу, даетъ свою формулу для вычисленія двойного интеграла. Разсмотримъ ихъ послѣдовательно.

Будемъ суммировать сначала по кольцамъ, а потомъ кольца.

Предположимъ, что контуръ C пересѣкается каждой окружностью радіуса r только въ двухъ точкахъ P и Q, и пусть α - уголъ наклоненія луча OP, а β уголъ наклоненія луча OQ, при чемъ $\alpha < \beta$. Пусть также r_0 и R наименьшее и наибольшее изъ тѣхъ значеній, которыя можетъ принимать r т.е пусть r_0 и R тѣ границы, въ которыхъ долженъ измѣняться r, чтобы окружность радіуса r пересѣкала контуръ C. Для каждаго опредѣленнаго значенія r точки P и Q занимаютъ опредѣленное положеніе.



углы же α и β имѣютъ опредѣленныя значенія. Съ измѣненіемъ r будутъ, вообще говоря, измѣняться и α и β. Слѣдовательно, α и β есть нѣкоторыя функціи r. Пусть

$$\alpha = \varphi(r) \quad \beta = \psi(r) \tag{5}$$

Эти функціи мы должны каждый разъ находить изъ геометрическихъ свойствъ контура C.

Разсмотримъ сумму

$$s_h = \sum_{(r_h, r_{h+1})} \phi(r_h, \omega_k)\Delta r_h \Delta\omega_k$$

тѣхъ слагаемыхъ, которыя соотвѣтствуютъ кольцу (r_h , r_{h+1}).

Пусть окружность радіуса r_h пересѣкаетъ контуръ C въ точкахъ P_h и Q_h. Черезъ α_h и β_h обозначимъ углы наклоненія лучей OP_h и OQ_h къ оси x. Согласно (5)

$$\alpha_h = \varphi(r_h), \ \beta_h = \psi(r_h) \tag{6}$$

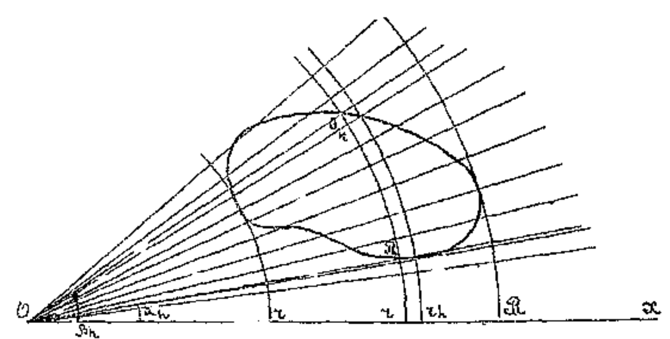
Для всѣхъ слагаемыхъ, относящихся къ одному и тому же кольцу r_h и Δr величины постоянныя, а потому

$$s_h = \left\{\sum_{(r_h, r_{h+1})} \phi(r_h, \omega_k)\Delta\omega_k\right\}\Delta r_h$$

Такъ какъ для полученія слагаемыхъ этой суммы надо брать изъ величинъ ω_1, ω_2, ω_3,... только тѣ, которыя промежуточны между α_h и β_h, то мы напишемъ, что

$$s_h = \left\{\sum_{\alpha_h}^{\beta_h} \phi(r_h\ \omega_k)\Delta\omega_k\right\}\Delta r_h \tag{7}$$

Чтобы получить s, надо взять сумму всѣхъ s_h. Для этого надо взять всѣ значенія r, r_2, r_3, ... промежуточныя между r и R.



Это мы напишемъ такъ

$$s=\sum s_h=\sum_{r_0}^{R}\left\{\sum_{\alpha_h}^{\beta_h}\varphi(r_h,\omega_k)\Delta\omega_k\right\}\Delta r_h \qquad (8)$$

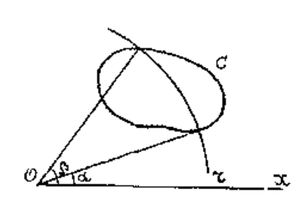
Переходимъ теперь къ предѣлу предполагая что разности $\Delta\omega_k$ и Δr_h безконечно умаляются. Послѣдовательно получимъ:

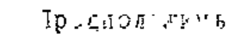
$$\lim s=\lim\sum_{r_0}^{R}\left\{\lim\sum_{\alpha_h}^{\beta_h}\varphi(r_h\ \omega_k)\Delta\omega_k\right\}\Delta r_h$$

$$=\lim\sum_{r_0}^{R}\left\{\int_{\varphi(r_h)}^{\psi(r_h)}\varphi(r\ \ \omega)d\omega\right\}\Delta r_h=$$

$$\int_{r_0}^{R}\left\{\int_{\varphi(r)}^{\psi(r)}\varphi(r\ \omega)\,d\omega\right\}dr$$

и такъ какъ $\alpha=\varphi(r)$, $\beta=\psi(r)$, то замѣняя функцію φ ея значеніемъ, получаемъ теорему

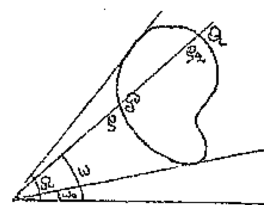




Если контуръ C пересѣкается только въ двухъ точкахъ всякой окружностью съ центромъ въ O то

$$\iint_C f(x\ y)dxdy=\int_{r_0}^{R}\left\{\int_{\alpha}^{\beta}f(r\cos\omega\ \ r\sin\omega)\,r\,d\omega\right\}dr$$

Посмотримъ теперь что мы получимъ, если слагаемыя суммы s' будемъ сначала собирать не по кольцамъ а по секторіальнымъ полосамъ.



Предположимъ, что контуръ C пересѣкается всякимъ лучомъ наклоненнымъ подъ угломъ ω, только въ двухъ точкахъ P и Q радіусы-векторы которыхъ обозначимъ черезъ ρ_1 и ρ_2. Пусть

$$\rho_1=\varphi(\omega)\ ,\ \rho_2=\psi(\omega).$$

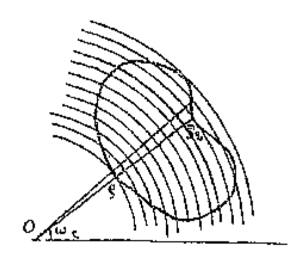
Черезъ ω_0 и Ω обозначимъ ть границы, въ которыхъ должно быть заключено уголъ ω чтобы лучъ наклоненный къ оси x подъ угломъ ω, пересѣкалъ контуръ.

Мы по прежнему имѣемъ:

$$s'=\sum f(r_h\cos\omega_k\ \ r_h\sin\omega_k)r_h\Delta r_h\Delta\omega_k=\sum\varphi(r_h\ \omega_k)\Delta r_h\Delta\omega_k$$

Пусть s_k сумма слагаемыхъ относящихся къ секторіальной полосѣ (ω_k, ω_{k+1}).

$$s_k=\sum_{\omega_k\ \omega_{k+1}}\varphi(r_h\ \omega_k)\Delta r_h\Delta\omega_k$$



Всѣ эти слагаемыя имѣютъ общіи множитель $\Delta\omega_k$; изъ чиселъ же r_1, r_2, r_3, ... въ нихъ входятъ только тѣ, которые промежуточны между ρ_1 и ρ_2, а потому

$$S_k = \left\{\sum_{\rho=\psi(\omega_k)}^{\rho_2=\chi(\omega_k)} \varphi(r_h\ \omega_k)\Delta r_h\right\}\Delta\omega_k$$

Ясно, что сумма S. можетъ быть представлена такъ

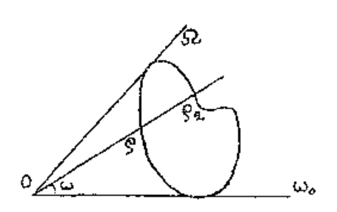
$$S' = \sum_{\omega}^{\Omega}\left\{\sum_{\rho_1=\psi(\omega_k)}^{\rho_2=\chi(\omega_k)} \varphi(r_k\ \omega_k)\Delta r_k\right\}\Delta\omega_k$$

Слѣдовательно

$$\lim S = \lim\sum_{\omega_0}^{\Omega}\left\{\int_{\psi(\omega_k)}^{\chi(\omega_k)} \varphi(r\ \omega_k)\,dr\right\}\Delta\omega_k =$$

$$= \int_{\omega_0}^{\Omega}\left\{\int_{\psi(\omega)}^{\chi(\omega)} \varphi(r\ \omega)\,dr\right\}d\omega$$

и мы получаемъ теорему:

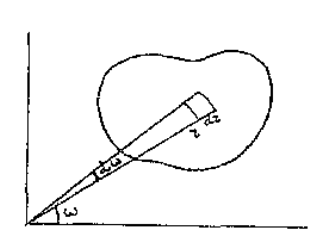


<u>Если контуръ пересѣкается каждымъ лучемъ не болѣе какъ въ двухъ точкахъ, то</u>

$$\iint_A f(x\ y)\,dx\,dy = \int_{\omega_0}^{\Omega}\left\{\int_{\rho}^{\rho_2} f(r\cos\omega\ r\sin\omega)\,r\,dr\right\}d\omega$$

Итакъ, мы имѣемъ двѣ формулы для вычисленія двойного интеграла въ полярныхъ координатахъ. Изъ нихъ приложима та или другая, смотря потому, пересѣкается ли контуръ только въ двухъ точкахъ или лучемъ или окружностью.

Чтобы легче удержать въ памяти эти формулы, повторимъ доказательство, опуская индексы у буквъ.



Мы воображаемъ площадь раздѣленной на элементарные кривыя четыреугольники. Площадь какого нибудь четыреугольника полярныя координаты **вершины котораго** r и ω, эквивалентна

$$r\,dr\,d\omega$$

Поэтому двойной интегралъ есть предѣлъ суммы

$$\sum f(r\cos\omega\ r\sin\omega)\,r\,dr\,d\omega$$

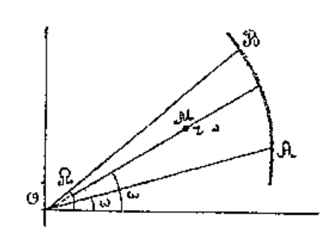
Группируя слагаемыя въ группы или по кольцамъ или по секто

ріальнымъ полоскамъ, мы въ предѣлѣ получимъ двое интегрированіе по ω или по r.

Внимательное разсмотрѣніе чертёжа вамъ укажет предѣлы каждаго интегрированія

Примѣръ. Пусть требуется вычислить двойной интегралъ

$$G = \iint F(x\ y)\,dx\,dy \qquad (1)$$



по площади, ограниченной прямыми OA и OB, наклоненнымъ къ оси x подъ углами ω_0 и Ω и кривой AB, уравненіе которой

$$\rho = f(\omega) \qquad (2)$$

Въ полярныхъ координатахъ имѣемъ

$$G = \iint F(r\cos\omega\ \ r\sin\omega)\,r\,dr\,d\omega$$

Будемъ первое интегрированіе производить по r. Когда точка M движется по лучу OM, наклоненному подъ угломъ ω, то r мѣняется отъ 0 до ρ а потому

$$G = \int_{\omega_0}^{\Omega}\left\{\int_0^{\rho} F(r\cos\omega\ \ r\sin\omega)\,r\,dr\right\}d\omega \qquad (3)$$

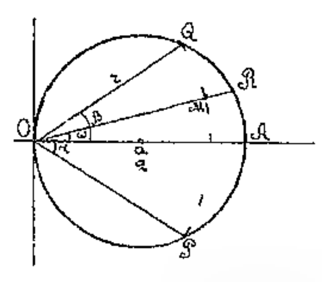
Въ частномъ случаѣ, если тожественно $F(x, y) = 1$, то G равняется площади AOB. Обозначая эту площадь черезъ u изъ (3) имѣемъ.

$$u \int_0^{\Omega}\left\{\int_0^{\rho} r\,dr\right\}d\omega = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega}\rho^2\,d\omega$$

и мы получили выраженіе для площади въ полярныхъ координатахъ

Примѣръ. Пусть требуется вычислить интегралъ

$$G = \iint \sqrt{a^2\ x^2 - y^2}\,dx\,dy \qquad (1)$$



по площади круга радіуса a, центръ котораго лежитъ на оси x отъ точки $\frac{a}{2}$. Обозначая черезъ r и ω полярныя координаты какой нибудь точки M, имѣемъ

$$G = \iint \sqrt{a^2\ r^2}\,r\,dr\,d\omega \qquad (2)$$

Интегрируемъ сначала по кольцу PQ произвольнаго радіуса r, при этомъ ω измѣняется отъ α до β. Собирая затѣмъ всѣ кольца, мы должны измѣнять r отъ 0 до a. Слѣдовательно

$$G = \int_0^{a}\left\{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{a^2\ r^2}\,r\,d\omega\right\}dr \qquad (3)$$

Если же мы пойдемъ сначала по секторіальной полосѣ $O\mathfrak{R}$ то r мѣняется отъ 0 до $O\mathfrak{R}$. Чтобы получить всѣ секторіальныя полосы, надо мѣнять ω отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Слѣдовательно

$$G=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{O\mathfrak{R}}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\right\}d\omega \qquad (4)$$

Замѣчая, что изъ прямоугольнаго треугольника $OQ\mathfrak{R}$.

$$r=a\cos\beta \qquad \cos\beta=\arccos\frac{r}{a}$$

и что $\alpha=-\beta$, мы изъ (3) получаемъ

$$G=\int_0^a\left\{\int_{\arccos\frac{r}{a}}^{+\arccos\frac{r}{a}}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,d\omega\right\}dr \qquad (5)$$

Такъ какъ $O\mathfrak{R}=a\cos\omega$, то (4) даетъ

$$G=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{a\cos\omega}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\right\}d\omega \qquad (6)$$

Замѣчая, что

$$\int\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=\int\frac{1}{2}\sqrt{a^2-r^2}\,dr^2=-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

мы изъ (6) находимъ

$$G=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\{1-\sin^3\omega\}d\omega=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}d\omega+\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\omega)\,d\cos\omega=\frac{\pi a^3}{3} \qquad (7)$$

Если же мы захотимъ вычислять по формулѣ (5), то мы легко найдемъ внутренній интегралъ и получимъ.

$$G=2\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\arccos\frac{r}{a}\,dr,$$

но этотъ интегралъ уже несколько трудно вычислить. Напротивъ зная (7), мы заключаемъ, что

$$\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\arccos\frac{r}{a}\,dr=\frac{\pi a^3}{6}$$

Мы видимъ, что различные способы вычисленія двойного интеграла даютъ намъ возможность попутно находить величину нѣкоторыхъ обыкновенныхъ интеграловъ.

ОБОБЩЕННЫЕ ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Закончимъ общую теорію двойныхъ интеграловъ понятіемъ объ обобщенныхъ двойныхъ интегралахъ. Такъ называются, во-первыхъ, тѣ двойные интегралы, подынтегральная функція которыхъ теряетъ непрерывность въ нѣкоторыхъ точкахъ площади интеграціи, и во вторыхъ, тѣ интегралы площадь интеграціи которыхъ безконечна

Разсмотримъ интегралы перваго типа.

Замѣтимъ, что функція двухъ перемѣнныхъ можетъ быть непрерывна или въ отдѣльныхъ точкахъ, или на цѣлой линіи. Такъ, напримѣръ, функція

$$\frac{1}{x^2+y^2}$$

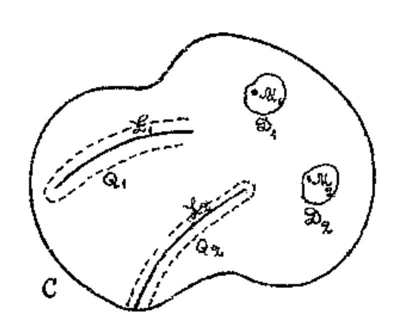
имѣетъ точку прерывности въ началѣ координатъ, гдѣ она обращается въ безконечность. Но функція

$$\frac{1}{x^2+y^2-a^2}$$

прерывна уже на всей окружности

$$x^2+y^2=a^2$$

Предположимъ же, что данная функція $f(x, y)$ прерывна на площади A, ограниченной контуромъ C, во первыхъ въ точкахъ M_1, M_2, M_3, и во вторыхъ на линіяхъ L_1, L_2, L_3, .



Окружимъ каждую изъ точекъ M_1, M_2, M_3,... контурами D_1, D_2, D_3, произвольной формы. Пусть u_1, u_2, u_3,... площади ограниченныя этими контурами.

Каждую изъ кривыхъ L_1, L_2, L_3,.. заключимъ въ замкнутые контуры Q_1, Q_2, Q_3,....; пусть v_1, v_2, v_3. площади, ограниченныя этими контурами. Обозначимъ черезъ A' площадь, ограниченную снаружи контуромъ C, изнутри контурами D_1, D_2, D_3, ... , Q_1, Q_2, Q_3,. Слѣдовательно

$$A'=A-(u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots)-(v_1+v_2+v_3+\ldots\ldots)$$

На площади A' данная функція уже непрерывна. Возьмемъ отъ нея интегралъ

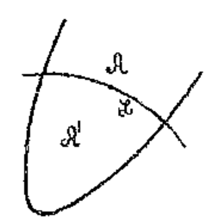
$$H=\iint_{A'} f(x,y)\,dx\,dy$$

по площади A'.

Если контуры D_1, D_2, D_3, . ., Q_1, Q_2, Q_3, .. будемъ измѣнять такъ, чтобы въ предѣлѣ площади u_1, u_2, u_3,. ., v_1, v_2, v_3, .. обратились въ нуль, то предѣлъ интеграла H, если этотъ предѣлъ существуетъ, называется обобщеннымъ интеграломъ по площади A. Слѣдовательно, по опредѣленію

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{A'=A}\iint_{A} f(x,y)\,dx\,dy$$

Чтобы получить обобщенный интегралъ, распространенный на площадь A, простирающуюся въ нѣкоторыхъ направленіяхъ въ безконечность поступаютъ слѣдующимъ образомъ проводятъ произвольно одну или нѣсколько линій L такъ, чтобы онѣ ограничивали нѣкоторую конечную часть A' площади A. Берутъ интегралъ

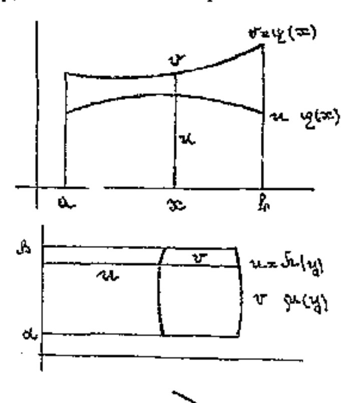


$$\mathcal{H} = \iint_{A'} f(x\ y)\,dx\,dy$$

и смотрятъ, если вспомогательныя линіи L отодвигать въ безконечность такъ, чтобы постепенно всѣ точки площади A присоединились къ площади A', то будетъ ли интегралъ $\mathcal{H}$ имѣть конечный предѣлъ. Если этотъ предѣлъ будетъ существовать то его принимаютъ за интегралъ отъ функціи по площади A

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Двойной интегралъ вычисляется:



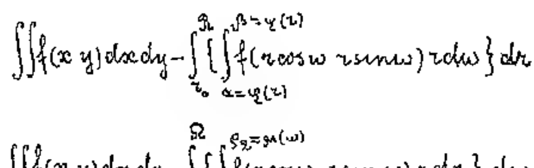
если площадь интеграціи перваго типа, то по формулѣ

$$\iint f(x\ y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x\ y)\,dy \right\} dx$$

если площадь второго типа то по формулѣ

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{\chi(y)}^{\psi(y)} f(x\ y)\,dx \right\} dy$$

Въ полярныхъ координатахъ, въ зависимости отъ типа площади, имѣемъ



$$\iint f(x\ y)\,dx\,dy = \int_{r_0}^{R} \left\{ \int_{\alpha=\varphi(r)}^{\beta=\psi(r)} f(r\cos\omega\ \ r\sin\omega)\, r\,d\omega \right\} dr$$

$$\iint f(x\ y)\,dx\,dy = \int_{\omega_0}^{\Omega} \left\{ \int_{\rho_1=\chi(\omega)}^{\rho_2=\psi(\omega)} f(r\cos\omega\ \ r\sin\omega)\, r\,dr \right\} d\omega$$

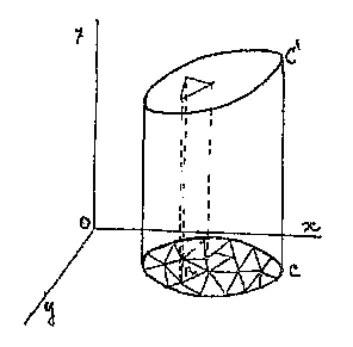
Обобщенные интегралы опредѣляются какъ предѣлы отъ непрерывныхъ функцій по конечнымъ площадямъ.

ГЛАВА XI. ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ ПРИЛОЖЕНІЯ ДВОЙНЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ

Теорія двойныхъ интеграловъ даетъ возможность вычислять объемы и поверхности тѣлъ произвольной формы.

ОБЪЕМЫ.

Положимъ, что мы имѣемъ цилиндроидъ, ограниченный сверху поверхностью, уравненіе которой



$$z = f(x, y)$$

Разбиваемъ площадь основанія на элементарныя площадки p_1, p_2, p_3, .. и надъ каждой площадкой p_k строимъ элементарный цилиндръ, объемъ котораго равенъ

$$f(x_k, y_k)\, p_k,$$

гдѣ x_k, y_k-координаты произвольно взятой точки на площадкѣ p_k. Такъ какъ объемъ V всего цилиндроида равенъ предѣлу суммы всѣхъ элементарныхъ цилиндровъ, то

$$V = \lim \sum f(x_k, y_k)\, p_k = \iint f(x, y)\, dx\, dy$$

и мы получаемъ теорему

ЕСЛИ z АППЛИКАТА ПОВЕРХНОСТИ, ОГРАНИЧИВАЮЩЕЙ СВЕРХУ ЦИЛИНДРОИДЪ, ТО ЕГО ОБЪЕМЪ РАВЕНЪ ДВОЙНОМУ ИНТЕГРАЛУ

$$\iint z\, dx\, dy$$

РАСПРОСТРАНЕННОМУ НА ПЛОЩАДЬ ОСНОВАНІЯ ЦИЛИНДРОИДА.

Приложимъ эту формулу для вычисленія объема эллипсоида, уравненіе котораго

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Верхнюю половину эллипсоида разсматриваемъ какъ цилиндроидъ, у котораго боковая поверхность исчезла. Такъ какъ

$$z = +c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

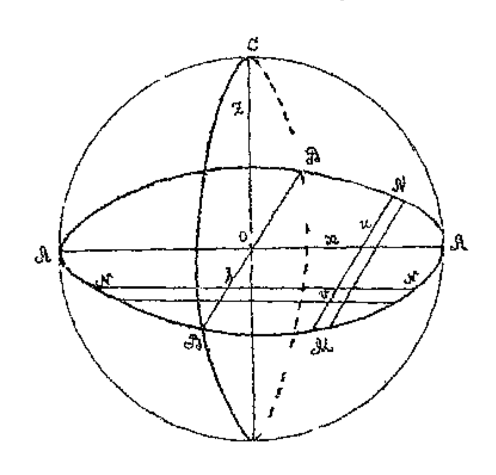
то, обозначая черезъ V объемъ всего эллипсоида, имѣемъ

$$\frac{1}{2} V = \iint c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy \tag{1}$$

гдѣ двойной интегралъ распространенъ по площади экваторіальнаго эллипса, уравненіе котораго

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

Чтобы вычислить двойной интегралъ, мы должны проинтегриро вать подынтегральную функцію или сначала по y , а потомъ по x , или въ обратномъ порядкѣ



Предположимъ, что мы сначала интегрируемъ по y потомъ по x .

Интегрированіе по y соотвѣтствуетъ суммированію по полоскѣ, параллельной оси y При данномъ x , величина y мѣняется отъ ординаты точки M' до ординаты точки M . Эти ординаты, которыя обозначимъ черезъ u и v , мы находимъ изъ уравненія (2). Имѣемъ:

$$u = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad , \quad v = + b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Величины u и v будутъ служить предѣлами при первой интеграціи по y Что касается предѣловъ второй интеграціи по x то ясно, что x измѣняется отъ $-a$ до $+a$ Слѣдовательно

$$\frac{1}{2}V \quad \int_{a}^{+a}\left\{\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} c\sqrt{1 \quad \frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2}}\,dy\right\}dx \qquad (3)$$

Предположимъ теперь, что мы сначала интегрируемъ по x , потомъ по y

Въ такомъ случаѣ первое интегрированіе по x соотвѣтствуетъ суммированію по полоскѣ, параллельной оси x При этомъ, при произвольно данномъ y , величина x будетъ измѣняться отъ абсциссы точки N' до абсциссы точки N , т.е какъ то слѣдуетъ изъ уравненія (2), отъ $-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$ до $+a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$. Эти величины и будутъ служить предѣлами при первой интеграціи. Слѣдовательно

$$\frac{1}{2}V = \int_{-b}^{+b}\left\{\int_{-a\sqrt{1\quad\frac{y^2}{b^2}}}^{+a\sqrt{1\quad\frac{y^2}{b^2}}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\right\}dy \qquad (4)$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ двѣ формулы (3) и (4) Произведемъ напр. вычисленіе по первой формулѣ Вычисляемъ внутренній интегралъ. Помня, что при интегрированіи по y надо разсматривать x какъ постоянное, производимъ подстановку

$$y = tb\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

Получаемъ

$$\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

Полагая же $t = \sin\varphi$, найдемъ, что

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

а потому

$$\frac{1}{2}v = \int_{-a}^{a}\frac{\pi}{2}bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{2\pi abc}{3}$$

Слѣдовательно, объемъ всего эллипсоида равенъ $\frac{4}{3}\pi abc$

Задача. 1) Какими интегралами выразится объемъ v' четверти эллипсоида ограниченной плоскостью xy снизу, плоскостью xz слѣва? 2) Какими интегралами выразится объемъ v той части эллипсоида, которая лежитъ въ нормальномъ координатномъ углѣ, будучи ограничена тремя координатными плоскостями?

Отвѣтъ.

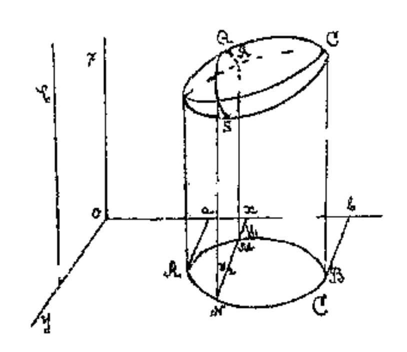
$$v' = \int_0^a\left\{\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right\}dx = \int_{-b}^{+b}\left\{\int_0^{+a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\right\}dy$$

$$v = \int_0^a\left\{\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right\}dx = \int_0^b\left\{\int_0^{+a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\right\}dy$$

ОБЪЕМЪ ТѢЛА ЧЕРЕЗЪ СѢЧЕНІЕ.

Положимъ, что требуется вычислить объемъ тѣла v, ограниченнаго замкнутой поверхностью S

Предположимъ, что всякой прямой, параллельной оси z, поверхность пересѣкается только въ двухъ точкахъ и что она расположена надъ плоскостью xy.



Пусть L прямая, параллельная оси z, лежащая внѣ поверхности. Мысленно приближаемъ эту прямую, пока она не коснется поверхности S, и затѣмъ обводимъ ее вокругъ поверхности S такъ, чтобы она все время касалась этой поверхности S, оста

ваясь параллельной оси z. Получимъ цилиндрическую поверхность описанную около поверхности S и касающуюся ея вдоль нѣкоторой линіи C'. Эта линія C' дѣлитъ поверхность S на двѣ половины: на нижнюю S_1 и верхнюю S_2. Аппликату первой обозначимъ черезъ z_1, второй – черезъ z_2. Пусть C проэкція контура C' на плоскость (x, y)

Ясно, что объемъ v нашего тѣла равенъ разности объемовъ цилиндроидовъ, ограниченныхъ сверху поверхностями S_1 и S_2, а потому

$$v = \iint_C (z_2 - z_1)\,dx\,dy \qquad (1)$$

Этой формулѣ можно дать простое геометрическое толкованіе. Пусть контуръ C пересѣкается прямой, параллельной оси y, только въ двухъ точкахъ. Мы имѣемъ:

$$v = \int_a^b \left\{\int_y^{y_2} (z_2 - z_1)\,dy\right\} dx, \qquad (2)$$

гдѣ y и y_2 – ординаты контура C.
Разсмотримъ внутренній интегралъ

$$G = \int_{y_1}^{y_2} (z_2 - z)\,dy \qquad (3)$$

Обозначимъ черезъ $\mathfrak{D}_x$ плоскость, перпендикулярную къ оси x въ какой нибудь точкѣ x. Эта плоскость пересѣкаетъ поверхность по нѣкоторой линіи $PQRS$. Пусть u площадь, ограниченная на плоскости $\mathfrak{D}_x$ контуромъ $PQRS$ Мы будемъ называть эту площадь площадью сѣченія. Очевидно, что u есть нѣкоторая функція x.

Когда мы вычисляемъ интегралъ G, то x должны разсматривать какъ постоянное. Поэтому въ (3) z_2 и z_1 мы должны разсматривать какъ функціи только y, причемъ z_2 служитъ аппликатой линіи PQR, а z_1 – аппликатой линіи PSR. Слѣдовательно изъ интеграловъ

$$\int_y^{y_2} z_2\,dy \quad \text{и} \quad \int_y^{y_2} z\,dy$$

первый даетъ площадь трапеціи $NPQRM$, а второй площадь трапеціи $NPSRM$, а потому $G = u$. Теперь (2) даетъ

$$v = \int_a^b u\,dx \qquad (4)$$

и мы получаемъ теорему:

ЕСЛИ u ПЛОЩАДЬ СѢЧЕНІЯ ДАННАГО ТѢЛА ПЛОСКОСТЬЮ, ПЕРПЕНДИ-

кулярной къ оси x, то объемъ тѣла равенъ

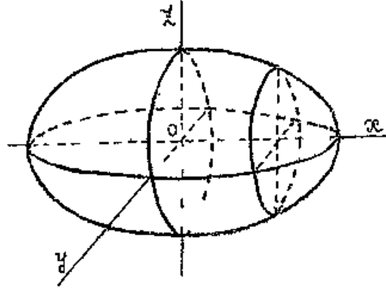
$$\int_a^b u\,dx$$

гдѣ a и b тѣ предѣлы, въ которыхъ мѣняется x

Какъ примѣръ, вычислимъ объемъ эллипсоида, уравненіе котораго

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Рассматривая x постояннымъ, получимъ уравненіе эллипса сѣченія, которое можно представить въ такомъ видѣ



$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

Теперь ясно, чему равны оси эллипса сѣченія, а потому

$$u=bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

Слѣдовательно, для объема V всего эллипсоида имѣемъ

$$V=\int_{a}^{+a}bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4\pi abc}{3}$$

ПОВЕРХНОСТЬ.

Теорія двойныхъ интеграловъ даетъ возможность рѣшить задачу о вычисленіи площади любой поверхности. Пусть по прежнему

$$z=f(x,y)$$

уравненіе нѣкоторой поверхности S и пусть S' часть ея, ограниченная какимъ-нибудь контуромъ C', проэкцію котораго на плоскость xy обозначимъ черезъ C. Найдемъ формулу для вычисленія площади поверхности S'.

Для этого мы сначала опредѣлимъ, что разумѣть подъ площадью поверхности S'.

Отмѣчаемъ на S достаточно большое число точекъ, расположенныхъ какъ угодно, и соединяемъ ихъ между собой прямыми такъ, чтобы получить многогранную поверхность, грани которой были бы треугольники. Такъ какъ вершины этихъ треугольниковъ лежатъ на поверхности S', то построенная такимъ образомъ поверхность будетъ вписана въ данную поверхность S'. Обозначимъ черезъ q_1, q_2, q_3, ... площади всѣхъ тѣхъ треугольниковъ, которые служатъ ея гранями, и пусть Q ихъ сумма

$$Q=q_1+q_2+q_3+\ldots=\sum q_k$$

Слѣдовательно Q есть площадь вписанной многогранной поверхности.

Мы предположимъ теперь, что число точекъ, отмѣченныхъ на поверхности S' безконечно возрастаетъ такъ, что разстоянія между ними безконечно умаляются Въ такомъ случаѣ число граней вписанной поверхности тоже безконечно возрастаетъ, причемъ размѣры граней безконечно умаляются.

Докажемъ, что при этихъ условіяхъ площадь Q вписанной многогранной поверхности стремится къ нѣкоторому, вполнѣ опредѣленному предѣлу, совершенно не зависящему отъ того, какъ вписывается многогранная поверхность и по какому закону возрастаетъ число ея граней. Этотъ предѣлъ мы и примемъ за величину площади поверхности S'

Вычисляемъ Q . Всѣ точки служащія вершинами многогранной поверхности, спроектируемъ на плоскость xy . Въ такомъ случаѣ каждый треугольникъ, служащій гранью вписанной поверхности, спроектируется тоже нѣкоторымъ треугольникомъ. Обозначимъ черезъ p_k площадь того треугольника, который является проекціей треугольника q_k . Мы получимъ на плоскости xy систему треугольниковъ p_1 , p_2 , p_3,...., которые покроютъ всю внутреннюю часть плоскости, ограниченной контуромъ C . Останутся непокрытыми только нѣкоторыя части около контура C . Эти части и треугольники p_1, p_2 , p_3,.... мы можемъ разсматривать какъ элементарныя площадки, на которыя раздѣляется часть плоскости, ограниченная контуромъ C .

Извѣстно, что площадь проекціи равна площади проектируемой фигуры, помноженной на косинусъ угла между плоскостями проекціи и проектируемой фигуры. Поэтому, если черезъ γ_k' мы обозначимъ уголъ между плоскостью xy и плоскостью треугольника q_k, то

$$p_k = q_k \cos\gamma_k'$$

Слѣдовательно

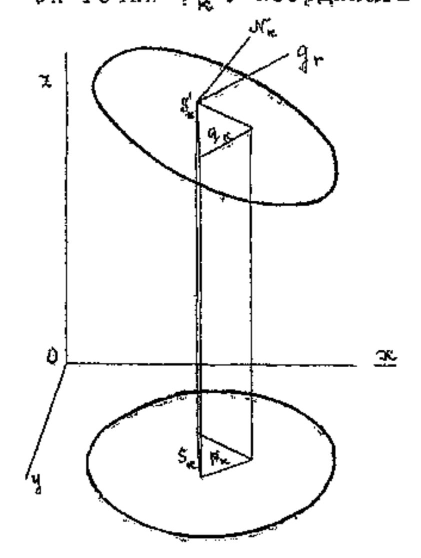
$$q_k = \frac{p_k}{\cos\gamma_k'} ,$$

а потому

$$Q = \sum q_k = \sum \frac{p_k}{\cos\gamma_k'} \qquad (1)$$

Но уголъ между плоскостями равенъ углу между перпендикулярами къ нимъ. Слѣдовательно, уголъ γ_k' есть уголъ между осью z и перпендикуляромъ къ плоскости треугольника q_k

Выберемъ въ треугольникѣ q_k какую-нибудь вершину; пусть это будетъ точка S'_k. Построимъ въ ней перпендикуляръ $S'_k g_k$ къ плоскости треугольника q_k и нормаль $S'_k N_k$ къ поверхности S', уголъ которой съ осью z обозначимъ черезъ γ'_k. Пусть, наконецъ, s_k та вершина треугольника p_k, которая является проекціей точки S'_k. Координаты точки s_k обозначимъ черезъ x_k и y_k



Замѣтимъ теперь слѣдующее. въ предѣлѣ тѣ двѣ стороны треугольника q_k которыя проходятъ черезъ точку S'_k, обратятся въ касательныя въ точкѣ S'_k къ поверхности S' Поэтому плоскость треугольника q_k совпадаетъ въ предѣлѣ съ касательной плоскостью къ поверхности S' въ точкѣ S'_k. Слѣдовательно, въ предѣлѣ направленія перпендикуляра $S'_k g_k$ и нормали $s_k N_k$ совпадаютъ Поэтому разность

$$\frac{1}{\cos\gamma_k} - \frac{1}{\cos\gamma'_k}$$

въ предѣлѣ равна нулю. Это значитъ, что <u>величины $\frac{1}{\cos\gamma'_k}$ и $\frac{1}{\cos\gamma_k}$ предѣльно-равны</u>.

Замѣтивъ это, возвратимся къ формулѣ (1). Имѣемъ

$$\lim Q = \lim \sum \frac{1}{\cos\gamma'_k} p_r$$

Замѣняя же каждый факторъ предѣльно-равной ему величиной, получаемъ:

$$\lim Q - \lim \sum \frac{1}{\cos\gamma_r} p_k \qquad (2)$$

Пусть γ уголъ съ осью z нормали въ какой-нибудь точкѣ M, координаты которой x, y, z. Очевидно, что γ а также и $\cos\gamma$ есть функціи x и y, и если

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \psi(x,y), \qquad (3)$$

то

$$\frac{1}{\cos\gamma_k} = \psi(x_k, y_k),$$

и равенство (2) принимаетъ слѣдующій видъ

$$\lim Q = \lim \sum \psi(x_k, y_k) p_k$$

На основаніи опредѣленія двойного интеграла, мы заключаемъ, что

$$\lim Q = \iint_C \psi(x\ y)\,dx\,dy \qquad (4)$$

Итакъ оказывается, что Q имѣетъ вполнѣ опредѣленный предѣлъ. Принимая этотъ предѣлъ за площадь поверхности S' и обозначая эту площадь черезъ $\mathcal{P}$, получаемъ

$$\mathcal{P} = \iint_C \psi(x\ y)\,dx\,dy = \iint_C \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} \qquad (5)$$

Но извѣстно, что если уравненіе поверхности

$$z = f(x\ y)$$

и если положить, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

$$\cos\gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Поэтому (5) перепишется въ такой формѣ

$$\mathcal{P} = \iint_C \sqrt{1 + p^2 + q^2}\ dx\,dy$$

и мы получаемъ теорему: ПЛОЩАДЬ $\mathcal{P}$ ПОВЕРХНОСТИ S', ОПРЕДѢЛЯЕТСЯ ФОРМУЛОЙ

$$\mathcal{P} = \iint_C \sqrt{1 + p^2 + q^2}\ dx\,dy$$

ГДѢ ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛЪ БЕРЕТСЯ ПО ПЛОЩАДИ ПРОЭКЦІИ ПОВЕРХНОСТИ S' НА ПЛОСКОСТЬ xy

Мы видимъ, что задача о вычисленіи площади произвольно взятой поверхности сводится къ задачѣ о вычисленіи двойного интеграла

О БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩИХСЯ ПЛОЩАДКАХЪ

Докажемъ слѣдующую лемму, которой часто пользуются въ физикѣ и механикѣ

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛЪ ОТЪ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦІИ, РАСПРОСТРАНЕННЫЙ НА БЕЗКОНЕЧНО-УМАЛЯЮЩУЮСЯ ПЛОЩАДКУ u ЭКВИВАЛЕНТЕНЪ ПРОИЗВЕДЕНІЮ ЭТОЙ ПЛОЩАДКИ НА ЗНАЧЕНІЕ ФУНКЦІИ ВЪ ЛЮБОЙ ТОЧКѢ ЭТОЙ ПЛОЩАДКИ. СЛѢДОВАТЕЛЬНО, ЕСЛИ u БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЕТСЯ, ТО

$$\iint_u f(x\ y)\,dx\,dy \approx f(x,y)\,u \qquad (1)$$

ГДѢ $(x\ \ y)$ ПРОИЗВОЛЬНО ВЗЯТАЯ ТОЧКА НА ПЛОЩАДКѢ u

По теоремѣ о среднемъ значеніи интеграла

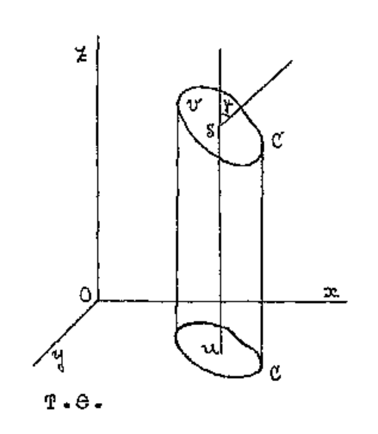
$$\iint\limits_{u} f(x\ y)\,dx\,dy = f(\xi\ \eta)\ u \qquad (2)$$

гдѣ (ξ , η) координаты нѣкоторой, вообще намъ неизвѣстной, точки внутри площадки u .

Пусть (x , y) произвольно взятая точка на той же площадкѣ u . Такъ какъ въ предѣлѣ эта площадка обращается въ точку, то предѣлъ разности f (x , y) - f (ξ η) равенъ нулю. Поэтому, замѣняя во (2) факторъ f(ξ , η) предѣльно равной величиной f (x , y), получимъ(1)

Замѣчаніе. Въ лѣвой части (1) символы x и y обозначаютъ аргументы функціи. Поэтому, по существу, эти x и y не имѣютъ никакого опредѣленнаго значенія; они только могутъ принимать различныя значенія Въ правой же части x и y имѣются нѣкоторыя значенія, потому что они-координаты нѣкоторой точки, хотя и произвольно взятой на площадкѣ u , но все-таки уже такъ или иначе взятой. Слѣдовательно, въ соотношеніи (1) символы x и y въ каждой части играютъ особую роль.

Пусть теперь v площадка нѣкоторой части данной поверхности, ограниченная контуромъ C . Черезъ u и C' обозначимъ проэкціи на плоскость (x , y) площадки v и контура C . Сохраняя прежнія обозначенія



$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{1}{\cos\gamma} = \varphi(x,y),$$

имѣемъ

$$v = \iint\limits_{(u)} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\,dy = \iint\limits_{(u)} \varphi(x\ y)\,dx\,dy$$

Пусть площадка v , а слѣдовательно и u безконечно умаляются Согласно съ леммой, имѣемъ

$$v \approx \varphi(x\ y)\ u,$$

т.е.

$$u \approx \cos\gamma\ v$$

гдѣ γ уголъ съ осью z нормали въ какой-нибудь точкѣ s на площадкѣ v

Площадка v есть часть кривой поверхности Вообразимъ на время, что эта площадка есть плоская площадка, расположенная въ пространствѣ такъ, что плоскость ея перпендикулярна къ нормали въ точкѣ s . Въ такомъ случаѣ уголъ γ былъ бы угломъ меж

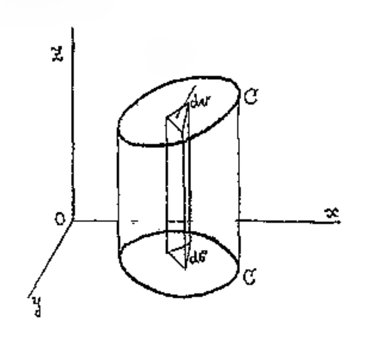
ду плоскостью площадки v и плоскостью (x, y), а потому проекція этой, хотя и кривой, плоской площадки v на плоскость (x, y) равняется точно $v\cos\gamma$. Принимая во вниманіе это и равенство (1), получаемъ теорему:

ПРИ ВЫЧИСЛЕНІИ ПРОЕКЦІИ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩЕЙСЯ КРИВОЙ ПЛОЩАДКИ v, ВСЕГДА МОЖНО, СЪ ТОЧКИ ЗРѢНІЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, РАЗСМАТРИВАТЬ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩУЮСЯ ПЛОЩАДКУ КАКЪ ПЛОСКУЮ ПЛОЩАДКУ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРОМЪ КЪ КОТОРОЙ СЛУЖИТЪ НОРМАЛЬ КЪ ПОВЕРХНОСТИ ВЪ КАКОЙ-НИБУДЬ ТОЧКѢ ЭТОЙ ПЛОЩАДКИ.

Вошло въ обычай всякую безконечно умаляющуюся часть поверхности называть элементомъ поверхности. Слѣдовательно

СЪ ТОЧКИ ЗРѢНІЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, ВСЯКІЙ БЕЗКОНЕЧНО-УМАЛЯЮЩІЙСЯ ЭЛЕМЕНТЪ КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ МОЖНО РАЗСМАТРИВАТЬ КАКЪ ПЛОСКІЙ ЭЛЕМЕНТЪ, ПЛОСКОСТЬ КОТОРАГО СОВПАДАЕТЪ СЪ КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ ВЪ ЛЮБОЙ ТОЧКѢ РАЗСМАТРИВАЕМАГО КРИВОГО ЭЛЕМЕНТА

Это заключеніе вполнѣ совпадаетъ съ нашимъ грубымъ представленіемъ о поверхности. Всякая очень малая часть кривой поверхности намъ представляется кусочкомъ плоскости. Читатель запомнитъ этотъ результатъ, хотя понадобится онъ намъ не скоро. Имъ удобно пользоваться для быстраго вывода формулы для поверхности любого типа. Разсуждаемъ такъ: пусть требуется вычислить поверхность S, ограниченную контуромъ, проекція котораго на плоскость (x, y) есть контуръ C'. Разбиваемъ всю поверхность S на элементарныя площадки. Пусть dv одна изъ нихъ и пусть γ уголъ съ осью z нормали въ какой-нибудь ея точкѣ.



Всѣ элементарныя площадки проэктируемъ на плоскость (x, y). Пусть вообще $d\sigma$ проэкція площадки dv. Очевидно, что эти площадки $d\sigma$ покроютъ всю площадь, ограниченную контуромъ C'. [illegible]

$$d\sigma \approx \cos\gamma\, dv \qquad dv \approx \frac{d\sigma}{\cos\gamma} \tag{1}$$

Ясно, что S равно точно суммѣ всѣхъ dv, а потому,

$$S = \lim \sum dv$$

Замѣнивъ dv эквивалентной величиной изъ (1), имѣемъ:

$$S = \lim \sum \frac{d\sigma}{\cos\gamma} = \iint_{C'} \frac{1}{\cos\gamma} d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{C'} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dxdy$$

Или рассуждаемъ такъ: на плоскость (x , y) беремъ элементарную площадку $dxdy$. Надъ ней расположена элементарная площадка $d\sigma$, эквивалентная $\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$, т.е. $\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$ а потому

$$S = \lim \sum \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy = \iint\limits_{C} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$$

Но такой короткій выводъ возможенъ только послѣ того, какъ мы доказали, что безконечно умаляющуюся кривую площадку можно разсматривать какъ плоскую

ГЛАВА XVI ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Тройные интегралы являются естественнымъ слѣдствіемъ приложенія къ функціямъ трехъ перемѣнныхъ тѣхъ же самыхъ принциповъ, которые, примѣненные къ функціямъ одного и двухъ перемѣнныхъ, привели насъ къ понятіямъ о простомъ и двойномъ опредѣленномъ интегралѣ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть V объемъ*) нѣкотораго тѣла, ограниченнаго со всѣхъ сторонъ одною или несколькими замкнутыми поверхностями, и пусть $f(x, y, z)$ функція трехъ перемѣнныхъ, непрерывная во всѣхъ точкахъ, лежащихъ внутри даннаго объема или на его поверхности.

Дѣлимъ данный объемъ V на достаточно малыя части произвольной формы. Ихъ объемы обозначимъ символами v_1 , v_2 , v_3 ... v_n и будемъ ихъ называть <u>элементарными объемами</u> или просто, <u>элементами</u>

Внутри или на поверхности каждаго элемента v_k выбираемъ

---

*) Слово „объемъ" въ дальнѣйшемъ употребляется въ двухъ смыслахъ. Съ одной стороны подъ объемомъ мы разумѣемъ часть, ограниченную со всѣхъ сторонъ, часть пространства, т.е. то, что обыкновенно называется геометрическимъ тѣломъ. Съ другой стороны подъ объемомъ мы разумѣемъ то число, которымъ измѣряется отношеніе пространства, занимаемаго даннымъ тѣломъ, къ пространству, занимаемому тѣломъ, принятымъ за единицу мѣры.

произвольно точку съ координатами ξ_k, η_k, ζ_k, и помножаемъ этотъ объемъ v_k на значеніе данной функціи въ выбранной точкѣ. Получимъ произведеніе

$$f(\xi_k \eta_k, \zeta_k) v_k.$$

Пусть s сумма всѣхъ произведеній, составленныхъ подобнымъ же образомъ съ помощью каждаго элементарнаго объема. Слѣдовательно

$$s = f(\xi_1 \eta_1 \zeta_1) v_1 + f(\xi_2 \eta_2 \zeta_2) v_2 + f(\xi_3 \eta_3 \zeta_3) v_3 + \ldots + f(\xi_n \eta_n \zeta_n) v_n$$

или, короче,

$$s = \sum f(\xi_k \eta_k \zeta_k) v_k$$

Если же символомъ dv мы обозначимъ общій типъ элементарнаго объема, называемаго также дифференціальнымъ объемомъ, то сумму s мы можемъ представить въ такомъ видѣ:

$$s = \sum f(x\, y\, z)\, dv$$

гдѣ подъ x, y, z мы должны разумѣть координаты какой-нибудь точки, лежащей внутри объема dv.

Вообразимъ теперь безконечный процессъ, заключающійся въ томъ, что отъ одного дѣленія тѣла на элементы мы переходимъ къ слѣдующему дѣленію такъ, что размѣры *) элементовъ безконечно умаляются. Въ такомъ случаѣ сумма S становится суммой безконечно умаляющихся слагаемыхъ въ безконечно возрастающемъ числѣ т.е. становится интегральной суммой. Предѣлъ ея называется тройнымъ интеграломъ отъ функціи $f(x, y, z)$, распространеннымъ на данный объемъ, и обозначается или такъ

$$\iiint_v f(x\, y\, z)\, dv$$

или, короче, такъ

$$\int_v f(x\, y\, z)\, dv$$

гдѣ, вмѣсто символа dv, можетъ быть поставленъ всякій иной символъ, избранный для обозначенія типа элементарнаго объема. Внизу знака интеграла часто приписываютъ символы, которые долж

*) *Размѣромъ тѣла называемъ длину наибольшей хорды, которую можно уложить между двумя точками поверхности, ограничивающей тѣло. Слѣдовательно, напримѣръ, для параллелипипеда размѣръ равенъ длинѣ его діагонали.*

ны указывать на тотъ объемъ, по которому берется интеграл.
Слѣдовательно:

ТРОЙНЫМЪ ИНТЕГРАЛОМЪ ОТЪ ДАННОЙ ФУНКЦІИ, РАСПРОСТРАНЕННЫМЪ ПО ДАННОМУ ОБЪЕМУ, НАЗЫВАЕТСЯ ПРЕДѢЛЪ СУММЫ ВСѢХЪ ПРОИЗВЕДЕНІЙ, ПОЛУЧАЕМЫХЪ ОТЪ УМНОЖЕНІЯ КАЖДАГО ЭЛЕМЕНТАРНАГО ОБЪЕМЫ, НА ЗНАЧЕНІЕ ФУНКЦІИ ВЪ КАКОЙ-НИБУДЬ ТОЧКѢ ЭТОГО ОБЪЕМА

$$\iiint_v f(x\, y\, z)\, dv \quad \lim \Sigma f(x\, y\, z)\, dv$$

Разсматривая сумму

$$s \sim \Sigma f(\xi_k\, \eta_k\, \zeta_k) v_r$$

мы безъ труда убѣждаемся, что множители v_k есть ея элементы интеграціи, а множители $f(\xi_k \ \eta_k, \zeta_k)$ ея факторы.

Если внутри объема v_k вмѣсто точки (ξ_k, η_k, ζ_k) мы выберем другую точку (ξ_k, η'_k, ξ'_k) то сумма S получитъ новое значеніе:

$$S = \Sigma f(\xi'_k, \eta_k\, \zeta_k) v_k$$

Но такъ какъ точки $(\xi_k \ \eta_k, \zeta_k)$ и (ξ_k, η_k, ζ_k) лежатъ внутри одного и того же элементарнаго объема и такъ какъ размѣры элементарныхъ объемовъ безконечно умаляются, то ясно что разность

$$f(\xi_k\, \eta_k, \zeta_k) - f(\xi_k \ \eta_k, \zeta_k)$$

въ предѣлѣ равна нулю. Слѣдовательно, суммы S и S имѣютъ факторами предѣльно-равныя величины, а потому, по второму принципу

$$\lim s - \lim s$$

Такъ мы убѣждаемся, что предѣлъ суммы s, т.е. величина тройного интеграла, не зависитъ отъ выбора точекъ внутри элементарныхъ объемовъ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНІЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА.

Тройной интегралъ имѣетъ простое геометрическое значеніе въ томъ случаѣ, когда подынтегральная функція равна единицѣ. Въ самомъ дѣлѣ въ основномъ равенствѣ

$$\iiint_v f(x\, y\, z)\, dv \quad \lim \Sigma f(x\, y\, z)\, dv$$

примемъ функцію f тождественно равной единицѣ. Имѣемъ

$$\iiint_v dv \quad \lim \Sigma dv \quad \lim \Sigma v_k$$

Но сумма всѣхъ элементарныхъ объемовъ очевидно равна данному объему v а потому

$$\iiint_v dv = v$$

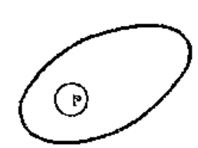
и мы получаемъ теорему ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛЪ ОТЪ ФУНКЦІИ РАВНОЙ ЕДИНИЦѢ РАВЕНЪ ОБЪЕМУ ТОГО ТѢЛА, НА КОТОРОЕ ОНЪ РАСПРОСТРАНЕНЪ.

Но въ общемъ случаѣ, когда подинтегральная функція не равна единицѣ, тройной интегралъ не имѣетъ геометрическаго значенія.

МЕХАНИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНІЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Тройному интегралу можетъ быть приданъ простой механическій смыслъ.

Пусть имѣемъ неоднородное тѣло Возьмемъ внутри его какую нибудь точку p и мысленно выдѣлимъ изъ тѣла нѣкоторый достаточно малый объемъ v такъ, чтобы точка p была внутри его. Подобнымъ образомъ расположенный объемъ будемъ называть объемомъ около точки p Если m-масса заключенная внутри его, то величина отношенія



$$\frac{m}{v}$$

т. е. величина отношенія массы вещества къ тому объему, въ которомъ она заключена, называется средней плотностью вещества въ разсматриваемомъ объемѣ

Вообразимъ, что объемъ v безконечно умаляется.

Предѣлъ средней плотности безконечно умаляющагося объема называется плотностью въ той точкѣ тѣла, въ которую въ предѣлѣ обращается безконечно-умаляющійся объемъ.

Слѣдовательно, по опредѣленію, если черезъ ϱ обозначимъ плотность вещества въ точкѣ p, то

$$\lim \frac{m}{v} = \varrho$$

откуда

$$\lim \frac{m}{\varrho v} = 1,$$

и слѣдовательно, $m \approx \varrho v$. Получаемъ теорему.

МАССА ВЕЩЕСТВА, ЗАКЛЮЧЕННАГО ВЪ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩЕМСЯ ОБЪЕМѢ, ЭКВИВАЛЕНТНА ПРОИЗВЕДЕНІЮ ПЛОТНОСТИ ВЪ КАКОЙ-НИБУДЬ ТОЧКѢ ОБЪЕМА НА ВЕЛИЧИНУ САМОГО ОБЪЕМА.

Рассмотримъ теперь слѣдующую задачу. Пусть требуется вычислить массу неоднороднаго тѣла, зная его плотность ϱ въ каждой точкѣ. Слѣдовательно, ϱ есть нѣкоторая функція координатъ точки. Пусть

$$\varrho = f(x\ y\ z)$$

Дѣлимъ тѣло на элементарные объемы

$$v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n,$$

и пусть m_k - масса вещества въ объемѣ v_k. Если ϱ_k - плотность въ какой-нибудь точкѣ (ξ_k, η_k, ζ_k) этого объема, то какъ мы видѣли,

$$m_k \approx \varrho_k v_k$$

но $\varrho_k = f(\xi_k\ \eta_k\ \zeta_k)$ и потому

$$m_k \approx f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k \qquad (1)$$

Если теперь M - масса всего тѣла, то

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots + m_n = \Sigma m_k,$$

и это равенство справедливое при всякомъ дѣленіи на элементарные объемы, будетъ справедливо и въ предѣлѣ:

$$M = \lim \Sigma m_k$$

Замѣняя же m_k эквивалентной величиной, получаемъ

$$M = \lim \Sigma f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k = \lim \Sigma f(x\ y\ z) dv$$

Но, по опредѣленію, правая часть есть тройной интегралъ, а потому теорема:

МАССА, ЗАКЛЮЧЕННАЯ ВЪ ОБЪЕМѢ, ВЫРАЖАЕТСЯ ТРОЙНЫМЪ ИНТЕГРАЛОМЪ, РАСПРОСТРАНЕННЫМЪ НА ОБЪЕМЪ, А ИМЕННО

$$M = \iiint f(x, y, z) dv$$

гдѣ $f(x, y, z)$ - плотность тѣла въ точкѣ (x, y, z).

Какова бы ни была данная функція $f(x, y, z)$, мы всегда можемъ вообразить себѣ тѣло, плотность котораго въ каждой точкѣ равна значенію данной функціи въ этой точкѣ:

$$\varrho = f(x, y, z)$$

Слѣдовательно, всякій тройной интегралъ, съ механической точки зрѣнія, всегда можно разсматривать какъ массу нѣкотораго тѣла.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПАРАЛЛЕЛИПИПЕДЫ.

Пока мы предполагали, что элементарные объемы, на которые

мы дѣлили наше тѣло, были произвольной формы. Оказывается выгоднымъ выбрать ихъ слѣдующимъ образомъ.

Установивъ въ пространствѣ прямоугольную систему Декартовыхъ осей координатъ, мы проведемъ систему достаточно близкихъ другъ къ другу плоскостей, перпендикулярныхъ къ оси x. Этими плоскостями наше тѣло раздѣлится на части, которыя мы будемъ называть слоями тѣла.

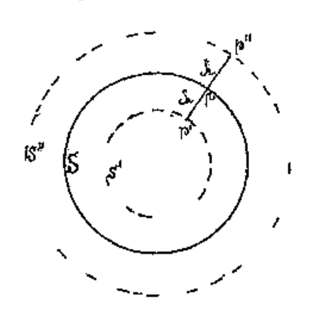
Вторую систему плоскостей проводимъ перпендикулярно къ оси y. Этой системой каждый слой тѣла разрѣжется на части, которыя мы будемъ называть столбиками.

Наконецъ проводимъ третью систему плоскостей, перпендикулярныхъ къ оси z. Этими плоскостями каждый столбикъ разрѣжется на элементарные параллелипипеды.

Итакъ, тремя системами плоскостей, перпендикулярныхъ къ осямъ координатъ, мы раздѣляемъ пространство, а вмѣстѣ съ тѣмъ и наше тѣло, на элементарные параллелипипеды, которые естественно распадаются на три класса: на внутреннiе, внѣшнiе и граничные, причемъ граничнымъ параллелипипедомъ мы называемъ всякiй параллелипипедъ, который имѣетъ хоть одну общую точку съ поверхностью объема.

Докажемъ, что если размѣры элементарныхъ параллелипипедовъ будутъ безконечно умаляться, то сумма граничныхъ параллелипипедовъ въ предѣлѣ обращается въ нуль. Для простоты предположимъ, что тѣло ограничено только одною поверхностью S. Какъ увидимъ, доказательство не зависитъ отъ числа поверхностей, ограничивающихъ данное тѣло.

Пусть λ наибольшiй изъ размѣровъ элементарныхъ параллелипипедовъ. Вообразимъ, что во всякой точкѣ p данной поверхности S построена нормаль, на которой откладываемъ, по ту и другую сторону отъ p, отрѣзки pp' и pp'' длиною равные λ. Если такое построенiе мы сдѣлаемъ для каждой точки p поверхности S, то ясно, что точки p'' въ своей совокупности дадутъ нѣкоторую поверхность S'', внутри которой будетъ заключена данная поверхность S, точки же p' дадутъ нѣкоторую поверхность S', лежащую внутри S. Пусть τ объемъ той части пространства, которая заключена между поверхностями S' и S''. Эта часть пространства



имѣетъ видъ слоя, за толщину котораго мы примемъ величину $2h$

Геометрически ясно, что всѣ граничные параллелипипеды, сумму которыхъ обозначимъ черезъ q лежатъ внутри слоя τ а потому

$$q < \tau$$

Если же заставимъ величину h безконечно умаляться то очевидно, что

$$\lim \tau = 0$$

Слѣдовательно, также и $\lim q = 0$, а потому теорема:

СУММА ВСѢХЪ ГРАНИЧНЫХЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ПАРАЛЛЕЛИПИПЕДОВЪ ВЪ ПРЕДѢЛѢ РАВНА НУЛЮ.

Опираясь на эту теорему, легко доказать, что при вычисленіи тройного интеграла, какъ предѣла суммы, можно пренебрегать граничными параллелипипедами. Въ самомъ дѣлѣ, составимъ сумму s

Обозначимъ черезъ v_k общій типъ внутренняго элементарнаго параллелипипеда, а черезъ v'_h общій типъ тѣхъ частей граничныхъ параллелипипедовъ, которые лежатъ внутри поверхности S

Каждый v_k даетъ для суммы s слагаемое типа

$$f(\xi_k\, \eta_k\, \zeta_k) v_k$$

Каждая же часть v_h даетъ слагаемое типа

$$f(\xi_h\, \eta_h\, \zeta_h) v_h$$

а потому можно написать что

$$s = \sum f(\xi_k\, \eta_k\, \zeta_k) v_k + s' \qquad (1)$$

гдѣ

$$s' = \sum f(\xi_h, \eta_h\, \zeta_h) v_h \qquad (2)$$

Пусть M -наибольшее значеніе модуля функціи $f(x, y, z)$ въ разсматриваемой области. Слѣдовательно, при всякомъ x y z

$$|f(x\, y\, z)| \leq M$$

а потому изъ (2)

$$|s'| \leq M \sum v_h$$

Такъ какъ въ предѣлѣ сумма всѣхъ граничныхъ параллелипипедовъ, тѣмъ болѣе частей ихъ равна нулю, то

$$\lim s' = 0,$$

и изъ (1) слѣдуетъ, что

$$\lim s = \lim \sum f(\xi_k\, \eta_k\, \zeta_k) v_k,$$

а потому теорема. ПРИ ВЫЧИСЛЕНІИ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА КАКЪ ПРЕДѢЛА СУММЫ, ГРАНИЧНЫМИ ПАРАЛЛЕЛИПИПЕДАМИ МОЖНО ПРЕНЕБРЕГАТЬ.

Слѣдовательно, въ дальнѣйшемъ, мы можемъ на граничные параллелипипеды не обращать никакого особаго вниманія.

ОБОЗНАЧЕНІЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

При обозначеніи тройного интеграла пользуются различными системами. Прежде всего пишутъ, смотря по личной склонности, то одинъ знакъ интеграла, то три.

Далѣе подынтегральное выраженіе всегда должно изображать общій типъ слагаемыхъ, входящихъ въ интегральную сумму. Съ этой цѣлью берутъ какую-нибудь букву, напр. v, и разсматриваютъ ее не какъ символъ величины, а какъ символъ понятія объема. Тогда символомъ Δv или, чаще, символомъ dv пользуются для обозначенія общаго типа элементарнаго объема. Слѣдовательно на символъ dv надо смотрѣть какъ на нѣчто одно цѣлое. Это не есть дифференціалъ величины v, потому что само v не есть величина. Но хотя v не есть величина, dv уже есть величина, причемъ въ этомъ сложномъ символѣ dv буква d тоже не имѣетъ самостоятельнаго значенія. Однако, въ виду внѣшняго сходства, величину dv, т.е. элементарный объемъ, часто называютъ дифференціальнымъ объемомъ или дифференціальнымъ элементомъ пространства.

Въ концѣ концовъ тройной интегралъ обозначается однимъ изъ слѣдующихъ двухъ символовъ:

$$\int f(x,y,z)\,dv \qquad \iiint f(x,y,z)\,dv$$

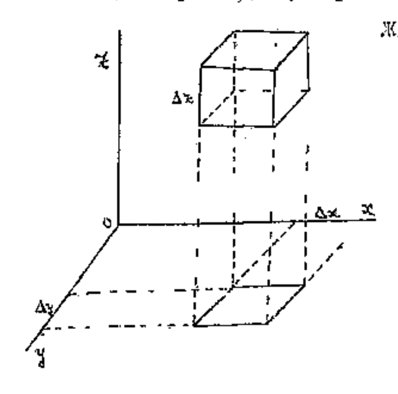
гдѣ вмѣсто буквы v каждый, по своему желанію, можетъ поставить другую букву. Большимъ предпочтеніемъ въ этомъ случаѣ пользуются буквы τ, σ, а также O. Поэтому часто встрѣчаются такія обозначенія:

$$\int f(x,y,z)\,d\tau \quad \int f(x,y,z)\,d\sigma, \quad \int f(x,y,z)\,dO$$

и тому подобныя. Внизу интеграла иногда приписываютъ символъ, указывающій на тотъ объемъ, по которому берется интегралъ. Но очень часто его не пишутъ, а только держатъ въ умѣ.

Дѣленіе тѣла на элементарные параллелипипеды привело еще къ одному обозначенію, которое очень удобно и которымъ поэтому наиболѣе часто пользуются.

Раздѣлимъ тѣло на параллелипипеды тремя системами плоскостей, перпендикулярныхъ къ осямъ координатъ. Пусть Δx-общій - жду двумя сосѣдними плоскостями, перпендикулярныхъ къ оси x ; черезъ Δy обозначимъ разстояніе между двумя какими-нибудь сосѣдними плоскостями, перпендикулярными къ оси y , наконецъ Δz пусть будетъ общій символъ разстоянія между двумя произвольно взятыми сосѣдними плоскостями, перпендикулярными къ оси z . Въ такомъ случаѣ ясно, что объемъ всякаго элементарнаго параллелепипеда представится произведеніемъ типа $\Delta x \Delta y \Delta z$, и слѣдовательно слагаемыя суммы s будутъ типа $f(x,y,z)\cdot \Delta x \Delta y \Delta z$. Поэтому мы можемъ написать такое равенство



$$s = \sum f(x\, y\, z)\Delta x \Delta y \Delta z$$

Такое изображеніе суммы s повело къ слѣдующему обозначенію тройного интеграла.

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Это обозначеніе очень удобно, такъ какъ оно хорошо напоминаетъ происхожденіе тройного интеграла. Мы имѣемъ основное равенство

$$\iiint f(x\, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim \sum f(x\, y\, z)\cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

ОСНОВНЫЯ ТЕОРЕМЫ О ТРОЙНОМЪ ИНТЕГРАЛѢ

Обозначаемъ символами v , v_2 , v_3 , .. . v_n элементарные объемы, ξ_k, η_k, ζ_k - координаты точки, выбранной внутри объема v_k .

ТЕОРЕМА. ПОСТОЯННЫЙ МНОЖИТЕЛЬ МОЖНО ВНОСИТЬ ПОДЪ ЗНАКЪ ИНТЕГРАЛА, А СЛѢДОВАТЕЛЬНО И ВЫНОСИТЬ ИЗЪ ПОДЪ ЗНАКА ИНТЕГРАЛА

$$\iiint C f(x,y,z)\,dv = C\iiint f(x,y\, z)\,dv$$

Доказательство. Имѣемъ равенство

$$\sum C f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k) v_k = C\sum f(\xi_k\, \eta_k,\zeta_k) v_k$$

Переходя къ предѣлу, получаемъ теорему

ТЕОРЕМА. ИНТЕГРАЛЬ ОТЪ СУММЫ ФУНКЦІИ РАВЕНЪ СУММѢ ИНТЕГРАЛОВЪ ОТЪ СЛАГАЕМЫХЪ:

$$\iiint \{\varphi(x\,y\,z) \pm \psi(x\,y\,z)\}\,dv = \iiint \varphi(x\,y\,z)\,dv \pm \iiint \psi(x\,y\,z)\,dv$$

Доказательство. Имѣемъ

$$\sum \{\varphi(\xi_k\,\eta_k\,\zeta_k) \pm \psi(\xi_k\,\eta_k\,\zeta_k)\}v_k = \sum \varphi(\xi_k\,\eta_k\,\zeta_k)v_k \pm \sum \psi(\xi_k\,\eta_k\,\zeta_k)v_k$$

Переходя къ предѣлу, получимъ теорему.

ТЕОРЕМА. ИНТЕГРАЛЬ ПО ВСЕМУ ОБЪЕМУ РАВЕНЪ СУММѢ ИНТЕГРАЛОВЪ ПО ВСѢМЪ ТѢМЪ ЧАСТЯМЪ, НА КОТОРЫЯ РАЗДѢЛЕНЪ ДАННЫЙ ОБЪЕМЪ. СЛѢДОВАТЕЛЬНО ЕСЛИ ДАННЫЙ ОБЪЕМЪ v РАЗДѢЛЕНЪ НА ДВѢ ЧАСТИ v_1 И v_2, ТО

$$\iiint_v f(x\,y\,z)\,dv = \iiint_{v_1} f(x\,y\,z)\,dv + \iiint_{v_2} f(x\,y\,z)\,dv$$

Доказательство. Раздѣливъ данный объемъ v на элементарные объемы, мы слагаемыя суммы

$$\sum f(\xi_k\,\eta_k\,\zeta_k)v_k$$

раздѣляемъ на двѣ группы. Въ одну соединяемъ тѣ, которыя составлены съ помощью только элементарныхъ объемовъ, принадлежащихъ части v_1, слагаемыя, составленныя съ помощью элементарныхъ объемовъ, принадлежащихъ къ части v_2, дадутъ другую группу. Имѣемъ равенство

$$\sum_{v} f(\xi_k\,\eta_k\,\zeta_k)v_k = \sum_{v_1} f(\xi_k\,\eta_k\,\zeta_k)v_k + \sum_{v_2} f(\xi_k\,\eta_k\,\zeta_k)v_k$$

Переходя къ предѣлу, получимъ теорему

ВЫЧИСЛЕНІЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА.

Тройной интегралъ можетъ быть вычисленъ различными способами, которые всѣ основываются на возможности соединять въ различные группы слагаемыя суммы

$$s = \sum f(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

Пусть v данный объемъ, ограниченный только одною поверхностью S, относительно которой предположимъ, что она всякой прямой, параллельной оси x пересѣкается только въ двухъ точкахъ. Если это условіе не соблюдено, то предварительно раздѣлимъ данное тѣло на такія части, для каждой изъ которыхъ удо-

влетворялось бы это условіе.

Опишемъ около S цилиндръ съ образующими, перпендикулярными къ плоскости xy, его боковую поверхность обозначимъ черезъ $\mathcal{H}$.

Пусть C линія, по которой касаются между собой поверхности S и $\mathcal{H}$. Черезъ C' обозначимъ проэкцію C на плоскость xy. Очевидно, что $\mathcal{H}$ пересѣкается съ плоскостью xy какъ разъ по линіи C. Пусть $\mathcal{A}$ площадь, ограниченная контуромъ C. Мы предположимъ, что всякая прямая, параллельная оси y на плоскости xy, пересѣкаетъ контуръ C' только въ двухъ точкахъ. Если это условіе не соблюдено, то мы предварительно раздѣлимъ данное тѣло на такія части, для каждой изъ которыхъ это условіе соблюдалось бы.

Пусть наконецъ $\mathcal{A}a$ и $\mathcal{B}b$ крайнія ординаты контура C'. (Черт. ниже) Точками $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ контуръ C' дѣлится на двѣ части. Ординаты части $\mathcal{AFB}$ означимъ черезъ η_1, ординаты части $\mathcal{AUB}$ черезъ η_2 и пусть

$$\eta_1 = \lambda(x) \qquad \eta_2 = \mu(x) \tag{1}$$

Контуромъ C поверхность S дѣлится на двѣ части на нижнюю S_1, и верхнюю S_2 Аппликату первой обозначимъ черезъ ζ_1, аппликату второй черезъ ζ_2. Пусть

$$\zeta_1 = \varphi(x\ y) \quad , \quad \zeta_2 = \varphi(x\ y)$$

Вообразимъ теперь, что тремя системами плоскостей, перпендикулярныхъ къ осямъ, наше тѣло раздѣлено на элементарные параллелипипеды.

Плоскости, перпендикулярныя къ оси x, раздѣляя тѣло на слои, раздѣлятъ площадь $\mathcal{A}$ на вертикальныя полосы. Пусть $\mathcal{FGUV}$ одна изъ такихъ полосъ. Надъ нею расположенъ соотвѣтствующій ей слой тѣла.

Плоскости, перпендикулярныя къ оси y, раздѣляя слои на столбики, раздѣлятъ площадь $\mathcal{A}$ на прямоугольники.

Пусть $\mathcal{PQRS}$ одинъ изъ такихъ прямоугольниковъ Для сокращенія письма назовемъ его прямоугольникомъ u. Надъ нимъ расположенъ нѣкоторый столбикъ.

Координаты точки $\mathcal{P}$ пусть будутъ x и y.

Всѣ столбики плоскостями, перпендикулярными къ оси z, раздѣляются на элементарные параллелипипеды

Такимъ образомъ элементарные параллелипипеды группируются

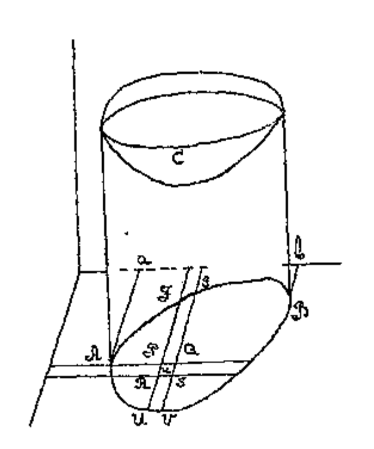
въ столбики, столбики въ слои слои же въ тѣло.

Разсмотримъ теперь сумму

$$S = \sum f(x\ y\ z)\,\Delta x \Delta y \Delta z \qquad (2)$$

Соединяемъ ея слагаемыя въ отдѣльныя группы, относя въ одну группу всѣ тѣ слагаемыя, которыя принадлежатъ параллелипипедамъ, лежащимъ въ одномъ о томъ же столбикѣ. Такую группировку мы будемъ называть суммированіемъ по столбику или вдоль столбика.

Пусть S_u-сумма той группы, которая соотвѣтствуетъ столбику надъ какимъ нибудь прямоугольникомъ u, что запишемъ такъ.



$$S_u = \sum_u f(x\ y, z)\,\Delta x \Delta y \Delta z$$

Во всѣхъ слагаемыхъ этой суммы $\Delta x \Delta y$ одни и тѣ же. Также одна и тѣ же x и y. Значенія же z различны и они заключены въ предѣлахъ

$$\zeta_1\ \varphi(x\ y) \qquad . \zeta_2 = \varphi(x\ y)$$

гдѣ x и y имѣютъ значенія, равныя координатамъ точки P

Поэтому мы запишемъ такъ:

$$S_u = \left\{ \sum_{\zeta}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z \right\} \Delta x \Delta y\ , \qquad (3)$$

вынося $\Delta x \Delta y$ общимъ множителемъ.

Складываемъ теперь всѣ суммы S_u, относящіяся къ одной и той же какой-нибудь полоскѣ $\mathfrak{F}\mathfrak{G}\, u\, v$. Мы будемъ говорить, что суммируемъ вдоль слоя, или вдоль полоски, или параллельно плоскости yz.

При этомъ суммированіи во всѣхъ суммахъ S_u, какъ x, такъ и Δx, будутъ оставаться одни и тѣ же, но y будетъ мѣняться отъ η_1 до η_2. Поэтому, согласно съ (3), результатъ суммированія вдоль слоя можно представить такъ

$$\sum S_u = \left\{ \sum_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z)\,\Delta z \right] \Delta y \right\} \Delta x \qquad (4)$$

вынося Δx общимъ множителемъ

Теперь остается сложить всѣ суммы, относящіяся къ различнымъ слоямъ При этомъ x мѣняется отъ a до b , а потому

$$s-\sum_a^b\left\{\sum_{\eta}^{\eta_2}\left(\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x\ y\ z)\Delta z\right)\Delta y\right\}\Delta x$$

Переходимъ къ предѣлу. Имѣемъ

$$\lim s\ \ \lim\sum_a^b\left\{\lim\sum_{\eta}^{\eta_2}\left(\lim\sum_{\zeta}^{\zeta_2} f(x\ y\ z)\Delta z\right)\Delta y\right\}\Delta x-$$

$$=\lim\sum_a^b\left\{\lim\sum_{\eta}^{\eta_2}\left(\int_{\zeta_1\ \varphi(x\ y)}^{\zeta_2\ \psi(x\ y)} f(x,\ y\ z)\,dz\right)\Delta y\right\}\Delta x$$

Въ внутреннихъ скобкахъ, когда мы проинтегрируемъ данную функцію по z , мы получимъ функцію только x и y Поэтому

$$\lim s\ \ \lim\sum\left\{\int_{\eta_1\ f_1(x)}^{\eta_2-f_2(x)}\left(\int_{\zeta=\varphi(x\ y)}^{\zeta_2=\psi(x\ y)} f(x,\ y\ z)\,dz\right)dy\right\}\Delta x$$

Въ квадратныхъ скобкахъ стоитъ уже функція только одного x , а потому окончательно

$$\lim s\ \ \int_a^b\left\{\int_{\eta}^{\eta_2}\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x\ y\ z)\,dz\right)dy\right\}dx \qquad (5)$$

Но лѣвая часть есть тройной интегралъ. Мы видимъ, что онъ выразился черезъ три послѣдовательныхъ простыхъ интеграла.

Повторимъ вкратцѣ все предыдущее разсужденіе. Группируя слагаемыя сначала по столбикамъ, потомъ вдоль слоевъ и наконецъ вдоль оси x , мы имѣемъ равенство·

$$\sum f(x\ y\ z)\Delta x\Delta y\Delta z\ \ \sum_a^b\left\{\sum_{\eta}^{\eta_2}\left(\sum_{\zeta}^{\zeta_2} f(x\ y\ z)\Delta z\right)\Delta y\right\}\Delta x$$

Въ предѣлѣ каждая сумма обращается въ соотвѣтствующій интегралъ, а потому теорема

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛЪ МОЖЕТЪ БЫТЬ ПОЛУЧЕНЪ ТРОЕКРАТНЫМЪ ПРОСТЫМЪ ИНТЕГРИРОВАНІЕМЪ ДАННОЙ ФУНКЦІИ СНАЧАЛА ПО ОДНОМУ ПЕРЕМѢННОМУ ЗАТѢМЪ ПО ДРУГОМУ, И НАКОНЕЦЪ ПО ТРЕТЬЕМУ

$$\iiint f(x\ y\ z)\,dx\,dy\,dz-\int_a^b\left\{\int_{\eta}^{\eta_2}\left(\int_{\zeta}^{\zeta_2} f(x\ y, z)\,dz\right)dy\right\}dx, \qquad (6)$$

... ζ_1 и ζ_2 перваго интеграла суть функцiи двухъ ... , предѣлы η_1 и η_2 втораго интеграла - ... последняго переменнаго, предѣлы третьяго интеграла - ... постоянныя величины.

При примѣненiи на практикѣ полученной формулы надо помнить, что первое интегрированiе соотвѣтствуетъ суммированiю ... по столбикамъ, или по слоямъ. Поэтому, когда мы производимъ первое интегрированiе по z, то мы на плоскости xy въ произвольной точкѣ (x y) возставляемъ перпендикуляръ, который ... изображаетъ столбикъ, и смотримъ, если итти по перпендикуляру внутри тѣла, то въ какихъ предѣлахъ мѣняется z. Эти предѣлы будутъ предѣлами интеграла по z. Они являются функцiями x и y.

Затѣмъ мы должны собрать всѣ столбики, принадлежащiе одному и тому же слою. Для этого, оставляя x постояннымъ, измѣняемъ y и находимъ тѣ предѣлы, въ которыхъ онъ измѣняется, пока перпендикуляръ въ точкѣ (x y), перемѣщаясь параллельно плоскости yz, пересѣкаетъ тѣло. Эти предѣлы, будучи функцiями x, служатъ предѣлами интеграла по y.

Наконецъ, предѣлы интеграла по x найдемъ, разсматривая крайнiя значенiя x для точекъ данной поверхности S.

Для вычисленiя тройного интеграла мы получили формулу, въ которой интегрированiе производится сначала по z, потомъ по y и наконецъ по x.

Этотъ порядокъ получился, очевидно, потому, что мы сначала собирали слагаемыя по вертикальнымъ столбикамъ, затѣмъ по слоямъ, параллельнымъ плоскости yz, и наконецъ суммировали вдоль оси x.

Но группировать слагаемыя можно и въ иномъ порядкѣ. Мы могли бы сначала суммировать по столбикамъ, перпендикулярнымъ плоскости yz, затѣмъ по слоямъ, параллельнымъ плоскости xy, и наконецъ вдоль оси z.

Тогда мы первое интегрированiе получили бы по x, второе по y, третье по z.

Вообще очевидно слѣдующее общее заключенiе:

ЧТОБЫ ПОЛУЧИТЬ ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛЪ, НАДО ПОДЫНТЕГРАЛЬНУЮ ФУНКЦIЮ ПРОИНТЕГРИРОВАТЬ ПО КАЖДОМУ ПЕРЕМѢННОМУ, ВСЕ РАВНО ВЪ КАКОМЪ ПОРЯДКѢ.

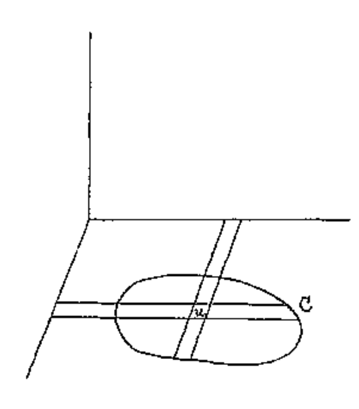
Но при этомъ надо всегда обращать самое тщательное внима

ніе на предѣлы каждаго интегрированія. Съ измѣненіемъ порядка интегрированія эти предѣлы почти всегда мѣняются.

Можно получить и другія формулы для вычисленія тройного интеграла. Отмѣтимъ двѣ изъ нихъ.

Когда мы просуммируемъ вдоль столбика, стоящаго надъ прямоугольникомъ u и получимъ сумму

$$S_u \left(\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x\, y\, z)\Delta z\right)\Delta x\Delta y,$$



то такихъ суммъ S_u мы будемъ имѣть столько, сколько прямоугольниковъ внутри контура C, и ясно, что сумма S равна суммѣ всѣхъ S_u, а потому

$$S \sum\left(\sum_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x\, y\, \ )\Delta z\right)\Delta x\Delta y$$

и слѣдовательно

$$\lim S \lim\sum\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x\, y\, z)\,dz\right)\Delta x\Delta y$$

Интегралъ въ скобкахъ есть функція только x и y. Если на время положить

$$\omega(x\, y) \int_{\zeta_1\ \varphi(x,y)}^{\zeta_2\ \psi(x,y)} f(x\, y\, z)\,dz$$

то

$$\lim S = \lim\sum \omega(x,y)\Delta x\Delta y$$

и ясно, что въ правой части мы имѣемъ предѣлъ суммы, каждое слагаемое которой получается отъ умноженія элементарной площадки $\Delta x\Delta y$ на значеніе функціи ω въ какой-нибудь точкѣ этой площадки. Слѣдовательно это двойной интегралъ:

$$\lim S \iint_A\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x\, y\, \ )\,dz\right)dx\,dy$$

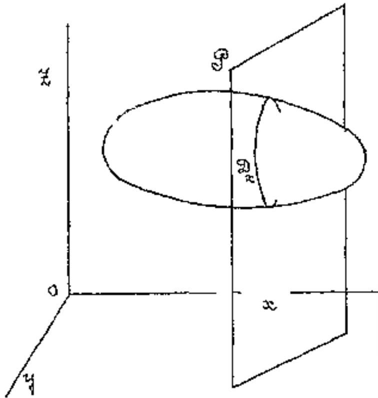
и потому имѣемъ вторую формулу:

$$\iiint f(x\, y\, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x\, y\, z)\,dz\right)dx\,dy$$

Наконецъ третью формулу получимъ такъ.

Обозначимъ черезъ D_x тотъ контуръ, по которому плоскость P перпендикулярная къ оси x въ какой-нибудь точкѣ x пе-

пересѣкаетъ поверхность S. Съ измѣненіемъ x этотъ контуръ мѣняется.



Слагаемыя суммы

$$s = \sum f(x\,y\,z)\Delta x \Delta y \Delta z$$

сгруппируемъ такъ: соединимъ въ одну группу всѣ тѣ слагаемыя, которыя относятся къ параллелепипедамъ, лежащимъ въ одномъ и томъ же слоѣ, перпендикулярномъ къ оси x. Обозначимъ черезъ S_x сумму той группы, которая относится къ слою, ограниченному плоскостями, перпендикулярными къ оси x въ точкахъ x и $x+\Delta x$. Всѣ параллелепипеды этого слоя имѣютъ одну и ту же высоту Δx, основанія же ихъ покрываютъ площадь, ограниченную контуромъ $\mathcal{D}_x$. Поэтому можно написать, что

$$S_x = \left(\sum_{\mathcal{D}_x} f(x\,y\,z)\Delta y \Delta z\right)\Delta x$$

слѣдовательно

$$s = \sum_a^b \left(\sum_{\mathcal{D}_x} f(x\,y\,z)\Delta y \Delta z\right)\Delta x$$

Въ предѣлѣ сумма въ скобкахъ обратится въ двойной интегралъ отъ функціи перемѣнныхъ y и z по площади ограниченной контуромъ $\mathcal{D}_x$.

$$\lim \sum_{\mathcal{D}_x} f(x,y,z)\Delta y \Delta z = \iint_{\mathcal{D}_x} f(x\,y\,z)\,dy\,dz$$

а потому

$$\lim s = \int_a^b \left\{\iint_{\mathcal{D}_x} f(x\,y\,z)\,dy\,dz\right\} dx$$

и мы получаемъ теорему.

ЕСЛИ $\mathcal{D}_x$ КОНТУРЪ, ПО КОТОРОМУ ПОВЕРХНОСТЬ S ПЕРЕСѢКАЕТСЯ ПЛОСКОСТЬЮ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ КЪ ОСИ x ВЪ ТОЧКѢ x, ТО

$$\iiint f(x\,y\,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left\{\iint_{\mathcal{D}_x} f(x\,y\,z)\,dy\,dz\right\} dx$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ слѣдующія три формулы

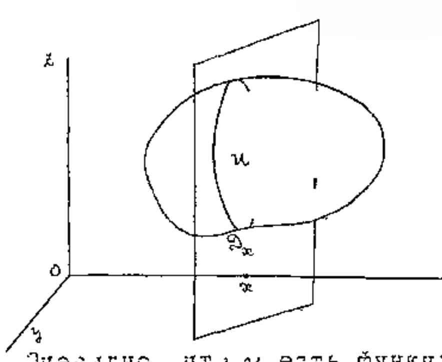
$$\iiint f(x\,y\,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left\{\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x\,y\,z)\,dz\right)dy\right\}dx =$$

$$= \iint\limits_{C} \left\{ \int_{\zeta}^{\zeta_2} f(x, y, z)\, dz \right\} dx\, dy$$

$$= \int_a^b \left\{ \iint\limits_{D_x} f(x\, y\, z)\, dy\, dz \right\} dx$$

Мѣняя порядокъ перемѣнныхъ x, y, z мы, очевидно, получимъ рядъ другихъ подобныхъ же формулъ.

Объемъ тѣла произвольной формы.



Если мы тѣло, ограниченное поверхностью S пересѣчемъ плоскостью $\mathcal{P}$ перпендикулярной къ оси x въ точкѣ x, то въ сѣченіи получаемъ нѣкоторый контуръ D_x. Этотъ контуръ ограничиваетъ на плоскости $\mathcal{P}$ нѣкоторую площадь, которую мы обозначимъ черезъ u и которую назовемъ площадью сѣченія.

Очевидно, что u есть функція x.

Мы видѣли, что

$$\iiint\limits_{V} f(x\, y\, z)\, dv = \int_a^b \left\{ \iint\limits_{D_x} f(x\, y\, z)\, dy\, dz \right\} dx$$

Полагая здѣсь $f = 1$ получаемъ

$$\iiint\limits_{V} dv = \int_a^b \left\{ \iint\limits_{D_x} dy\, dz \right\} dx$$

Но это равенство немедленно же обращается въ равенство

$$V = \int_a^b u\, dx$$

а потому теорема. Объемъ любого тѣла равенъ интегралу отъ площади сѣченія тѣла плоскостью, перпендикулярной оси.

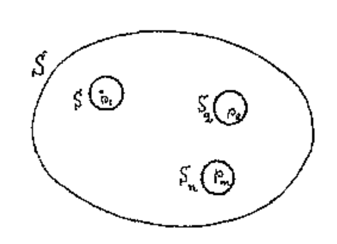
Съ помощью этой формулы легко вычислить, напримѣръ, объемъ эллипсоида.

ТРОЙНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Мы пока предполагали, что подинтегральная функція въ тройномъ интегралѣ непрерывна. Но можно понятіе о тройномъ интегралѣ обобщить и на случай прерывныхъ функцій.

Пусть функція $f(x\ y\ z)$ прерывна внутри поверхности S въ точкахъ p_1, p_2, ... p_m. Около каждой точки p_k со

ображаемъ замкнутую поверхность S_k пусть v_k пространство ограниченное ею



Изъ даннаго объема v мысленно выкидываемъ объемы v_1, v_2 ... v_m. Пусть v' остающійся объемъ. Внутри его данная функція уже непрерывна, а потому мы имѣемъ право говорить о интегралѣ взятомъ по объему v'. Пусть

$$G = \iiint_{v'} f(x\ y\ z)\,dv$$

Воображаемъ, что объемы v_1, v_2 ... v_m около точекъ прерывности безконечно умаляются. Предѣлъ интеграла G, если только этотъ предѣлъ существуетъ, называется <u>обобщеннымъ</u> тройнымъ интеграломъ отъ прерывной функціи. Слѣдовательно по опредѣленію

$$\iiint_{v} f(x\ y\ z)\,dv = \lim_{v'=v} \iiint_{v'} f(x\ y\ z)\,dv$$

Такъ вводится понятіе объ обобщенныхъ тройныхъ интегралахъ, распространенныхъ на объемы, ограниченные со всѣхъ сторонъ.

Можно вообразить, что поверхность S мѣняется, уходя всѣми своими точками или только нѣкоторыми въ безконечность. Предѣлъ интеграла

$$\iiint_{v} f(x\ y\ z)\,dv$$

если только этотъ предѣлъ существуетъ, даетъ намъ обобщенный интегралъ, распространенный на неограниченный объемъ.

Глава XIII. МЕТОДЪ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩИХСЯ

Простой интегралъ, двойной и тройной - каждый изъ нихъ есть предѣлъ суммы безконечно умаляющихся слагаемыхъ въ безконечно возрастающемъ числѣ, и къ разсмотрѣнію подобныхъ суммъ приводитъ насъ цѣлый рядъ геометрическихъ задачъ относительно длинъ, площадей и объемовъ. Всѣ онѣ были нами рѣшены только благодаря тому, что при вычисленіи предѣловъ интегральныхъ суммъ можно замѣнять безконечно умаляющіяся эквивалентными имъ величинами.

Въ безконечномъ множествѣ задачъ изъ механики и физики постоянно встрѣчаются безконечно умаляющіяся величины,

какъ вспомогательными величинами. [illegible] слѣдующимъ образомъ: изучемыя [illegible] мѣръ, длину какой нибудь кривой, [illegible] которыхъ предполагаютъ безконечно [illegible] часки безконечно уменьшались. [illegible] задача сводится въ вычисленію [illegible] безконечно уменьшающихся [illegible] ихъ отношеній. Это [illegible] облегчаетъ изслѣдованія потому что вмѣсто данныхъ безконечно умаляющихся можно брать имъ эквивалентныя. При этомъ [illegible] что въ то время какъ данныя безконечно [illegible] подлежатъ изученію, эквивалентныя имъ, [illegible]. И вотъ возникаетъ задача: нельзя ли указать общіи пріемъ, который позволялъ бы [illegible] и быстро находить величины, эквивалентныя даннымъ. Если это удастся, то [illegible] данныхъ величинъ мы можемъ изучать имъ эквивалентныя. На окончательный результатъ это не повліяетъ потому что данныя безконечно умаляющіяся всегда являются какъ вспомогательныя, [illegible] или какъ члены отношеній, или какъ [illegible] суммъ.

БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩІЯСЯ ДЛИНЫ.

За уголъ двухъ пересѣкающихся кривыхъ принимается, какъ извѣстно, уголъ между касательными къ нимъ въ точкѣ пересѣченія. Пусть же двѣ кривыя пересѣкаются въ точкѣ M [illegible] ломъ α. Черезъ β обозначимъ уголъ между хордами MA и MB. [illegible], что точки A и B безконечно приближаются къ M, [illegible] чемъ эти кривыя въ то же время [illegible] измѣняться. Въ предѣлѣ [illegible] MA и MB совпадутъ съ предѣльными [illegible] ихъ касательныхъ MG и MH, уголъ между [illegible] за уголъ между кривыми MA и MB [illegible]

$\lim \beta = \lim \alpha$, т.е. [illegible]

[illegible]

или могутъ стремиться къ предѣламъ, неравнымъ нулю. Такъ, напримѣръ, если катеты прямоугольнаго треугольника x и x^2, и если α уголъ противъ катета x^2, то $tg\,\alpha = x$. Слѣдовательно, если x безконечно умаляется, то α тоже безконечно умаляется.

Но если катеты x и $5x + x^2$, и если α уголъ, противолежащій второму катету, то теперь

$$tg\,\alpha = 5 + x \ , \quad \lim tg\,\alpha = 5$$

и, слѣдовательно, уголъ α не умаляется.

ЕСЛИ НИ ОДИНЪ ИЗЪ УГЛОВЪ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩАГОСЯ ТРЕУГОЛЬНИКА НЕ УМАЛЯЕТСЯ, НО КАЖДЫЙ ИЗЪ НИХЪ СТРЕМИТСЯ КЪ НѢКОТОРОМУ ПРЕДѢЛУ, НЕРАВНОМУ НУЛЮ, ТО МЫ УСЛОВИМСЯ ТАКОЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ НАЗЫВАТЬ ТРЕУГОЛЬНИКОМЪ СЪ КОНЕЧНЫМИ УГЛАМИ.

Пусть теперь a, b, c безконечно умаляющіяся стороны кривого треугольника; черезъ α β γ обозначимъ противолежащіе углы. Мы предположимъ, что треугольникъ abc съ конечными углами. Слѣдовательно

$$\lim \alpha = \alpha_1 \quad \lim \beta = \beta_1 \ , \ \lim \gamma = \gamma_1 \qquad (1)$$

гдѣ α_1, β_1, γ_1 не равны нулю (черт. ниже).

Пусть a', b', c' хорды дугъ a, b, c, эти хорды образуютъ треугольникъ, углы котораго обозначимъ черезъ α', β', γ'.

Такъ какъ предѣлъ угла между безконечно умаляющимися дугами равенъ предѣлу угла между ихъ хордами, то

$$\lim \alpha' = \alpha_1 \ , \quad \lim \beta' = \beta_1 \quad \lim \gamma' = \gamma_1 \qquad (2)$$

Рядомъ съ треугольниками abc и $a'b'c'$ разсмотримъ новый треугольникъ, углы котораго возьмемъ равными α_1, β_1, γ_1. Но одними углами треугольникъ не опредѣляется. Должна быть дана еще одна сторона. За сторону противъ угла α_1 возьмемъ величину a_1, эквивалентную a. Въ такомъ случаѣ двѣ другія стороны уже вполнѣ опредѣлены. Обозначимъ ихъ черезъ b_1 и c_1. Имѣемъ:

$$\frac{a_1}{\sin \alpha_1} = \frac{b_1}{\sin \beta_1} = \frac{c_1}{\sin \gamma_1}$$

$$\frac{a'}{\sin \alpha'} = \frac{b'}{\sin \beta'} = \frac{c'}{\sin \gamma'}$$

Дѣлимъ верхнія на нижнія

$$\left(\frac{a_1}{a'}\right) \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha_1} = \left(\frac{b_1}{b'}\right) \cdot \frac{\sin \beta'}{\sin \beta_1} = \left(\frac{c_1}{c'}\right) \cdot \frac{\sin \gamma'}{\sin \gamma_1}$$

Пользуясь равенствами (2) и [illegible] $a \approx a$, заключаемъ, что

$$1 = \lim \frac{b_1}{b'} = \lim \frac{c_1}{c'} .$$

Слѣдовательно

$$a \approx a_1 \quad b_1 \approx b, \quad c \approx c,$$

а такъ какъ дуги эквивалентны хордамъ, то

$$a \approx a \quad b \approx b \quad c_1 \approx c$$

Получаемъ теорему: ЕСЛИ a, b c -СТОРОНЫ α, β, γ УГЛЫ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩАГОСЯ КРИВОГО ТРЕУГОЛЬНИКА СЪ КОНЕЧНЫМИ УГЛАМИ ПРИЧЕМЪ

$$\lim \alpha = \alpha_1, \quad \lim \beta = \beta_1 \quad \lim \gamma = \gamma_1,$$

ТО ВСЕГДА МОЖНО ПОСТРОИТЬ ПЛОСКІЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ СЪ УГЛАМИ α_1, β_1, γ_1 И СО СТОРОНАМИ a b c, КОТОРЫЯ СООТВЕТСТВЕННО ЭКВИВАЛЕНТНЫ СТОРОНАМЪ a b, c

Значеніе этой теоремы огромно. Вообразимъ, что при рѣшеніи какого нибудь вопроса мы встрѣтились съ треугольникомъ, сторонами котораго служатъ безконечно умаляющіяся дуги a b, c. Эти дуги могутъ быть дугами весьма сложныхъ кривыхъ. Доказать между ними какія нибудь соотношенія было бы чрезвычайно трудно въ большинствѣ случаевъ не-возможно Но, какъ безконечно умаляющіяся величины, эти дуги имѣютъ для насъ только вспомогательное значеніе, какъ слагаемыя интегральныхъ суммъ, или какъ члены отношеній безконечно умаляющихся величинъ Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ право замѣнить ихъ эквивалентными величинами, а именно величинами a_1, b c_1, которыя являются уже сторонами прямолинейнаго треугольника Иначе говоря, мы можемъ разсуждать надъ треугольникомъ abc такъ, какъ будто бы стороны его были не кривыя дуги, а отрѣзки прямыхъ. Поэтому доказанную теорему мы можемъ формулировать такъ:

СЪ ТОЧКИ ЗРѢНІЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МОЖНО РАЗСМАТРИВАТЬ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩІЙСЯ КРИВОЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ КАКЪ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ, СЧИТАЯ КАЖДУЮ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩУЮСЯ ДУГУ ЗА ОТРѢЗОКЪ ПРЯМОЙ, ПРИЧЕМЪ УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА МОЖНО ПРИНИМАТЬ РАВНЫМИ ИХЪ ПРЕДѢЛАМЪ, Т.Е. ВМѢСТО ФАКТИЧЕСКАГО ПОЛОЖЕНІЯ КАЖДОЙ СТОРОНЫ РАЗСМАТРИВАТЬ ЕЯ ПРЕДѢЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНІЕ.

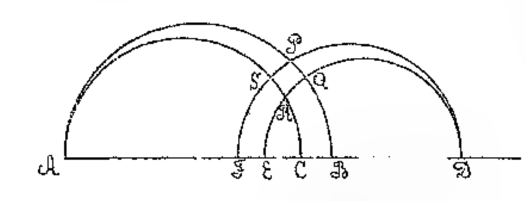
Если же мы имѣемъ систему какихъ либо безконечно умаляющихся дугъ a b c, d, e, f то проводя вспомогательныя дуги (на черт пунктиромъ), мы получимъ систему треугольниковъ къ каждой изъ сторонъ которого примѣнимо вышесказанное а потому какъ общее правило:

a b c d e f

СЪ ТОЧКИ ЗРѢНІЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩУЮСЯ ДУГУ МОЖНО РАЗСМАТРИВАТЬ КАКЪ ПРЯМОЙ ОТРѢЗОКЪ ПРИЧЕМЪ УГЛЫ МЕЖДУ

ДУГАМИ МОЖНО ПРИНИМАТЬ РАВНЫМИ ИХЪ ПРЕДѢЛАМЪ.

Для поясненія разсмотримъ гипотетическій примѣръ. Пусть [illegible] на діаметры построены полуокружности діаметровъ AB AC DE DF. Получаемъ кривой четыреугольникъ $PQRS$. Стороны его будутъ безконечно умаляться, если C безконечно приближается къ B а E къ F. Мы разсматриваемъ ихъ какъ отрѣзки прямыхъ. Въ предѣлѣ QR сливается съ SP. Поэтому уголъ RQP принимаемъ равнымъ его предѣлу SPA т.е. углу



между касательными въ точкѣ P къ дугамъ FPD APB. Слѣдовательно, разсматривая дуги RQ и SP какъ прямыя, мы имѣемъ право считать ихъ параллельными. На подобномъ же основаніи мы считаемъ дуги SR и PQ параллельными отрѣзками прямыхъ. Слѣдовательно, мы можемъ разсматривать четыреугольникъ $PQSR$ какъ параллелограммъ, а потому

$$SR = PQ \qquad SP = RQ$$

Точно говоря, вмѣсто знака равенства долженъ стоять знакъ эквивалентности. [illegible] эквивалентность дугъ SR и PQ съ одной стороны SP и RQ съ другой было бы чрезвычайно [illegible].

Мы теперь [illegible] подобное же справедливо и относи[illegible] четырехъ безконечно умаляющихся площадей.

ПОРЯДКИ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИНЪ

Когда мы разсматриваемъ одновременно нѣсколько безконечно умаляющихся величинъ, то у насъ возникаетъ смутное представленіе о томъ быстротѣ съ которой каждая изъ нихъ умаляется. Такъ, напримѣръ, если

$$y = x^3$$

и если x безконечно умаляется, то y тоже безконечно умаляется, причемъ мы склонны утверждать, что y быстрѣе умаляется, чѣмъ x.

Чтобы сравнить двѣ [illegible] величины, т.е. чтобы одну изъ нихъ измѣрить другою, мы разсматриваемъ ихъ отношеніе. [illegible] того же метода [illegible] къ сравненію [illegible] различныхъ величинъ.

<u>Опредѣленіе</u>: ЕСЛИ [illegible]

$$\frac{b}{a}$$

ДВУХЪ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИНЪ β И α КОНЕЧЕНЪ И НЕ РАВЕНЪ НУЛЮ, ТО ГОВОРЯТЪ ЧТО ЭТИ ВЕЛИЧИНЫ ИМѢЮТЪ ОДИНЪ И ТОТЪ ЖЕ ПОРЯДОКЪ УМАЛЕНІЯ.

ЕСЛИ ЖЕ ПРЕДѢЛЪ ОТНОШЕНІЯ $\frac{\beta}{\alpha}$ РАВЕНЪ НУЛЮ, ТО ГОВОРЯТЪ ЧТО ПОРЯДОКЪ ВЕЛИЧИНЫ β ВЫШЕ, ИЛИ БОЛЬШЕ ПОРЯДКА ВЕЛИЧИНЫ α. НАПРОТИВЪ, ПОРЯДОКЪ ВЕЛИЧИНЫ β ПРИЗНАЕТСЯ НИЖЕ ПОРЯДКА ВЕЛИЧИНЫ α ЕСЛИ ПРЕДѢЛЪ ОТНОШЕНІЯ $\frac{\beta}{\alpha}$ РАВЕНЪ БЕЗКОНЕЧНОСТИ

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что порядокъ безконечно умаляющейся величины не есть свойство самой величины, разсматриваемой изолированно, внѣ связи съ другими величинами. Если мы знаемъ, что величина β безконечно умаляется, то мы еще не можемъ говорить о порядкѣ ея умаленія. Порядокъ появляется только тогда, когда мы сравниваемъ быстроту умаленія нѣсколькихъ величинъ. Поэтому безконечно умаляющаяся величина имѣетъ тотъ или иной порядокъ исключительно только по отношенію к какой нибудь другой величинѣ, а не сама по себѣ.

Пусть α безконечно умаляется. Въ такомъ случаѣ всякая изъ величинъ

$$\sqrt{\alpha} \quad \sqrt[3]{\alpha}\ , \quad \alpha^{5}\ , \quad \alpha^{2/3}$$

вообще всякая степень α^n съ положительнымъ показателемъ тоже умаляется. Разсмотримъ, каковы эти сравнительно другъ друга порядки различныхъ степеней безконечно умаляющейся величины. Мы имѣемъ

$$\frac{\alpha^p}{\alpha^q} = \alpha^{p-q}$$

Легко усматриваемъ, что, если α безконечно умаляется то

$$\lim \frac{\alpha^p}{\alpha^q} = 1 \qquad \text{если } p = q \qquad (1)$$

$$\lim \frac{\alpha^p}{\alpha^q} = 0 \qquad p > q \qquad (2)$$

$$\lim \frac{\alpha^p}{\alpha^q} = \infty \qquad p < q \qquad (3)$$

Согласно опредѣленію, въ первомъ случаѣ α^p и α^q одного порядка, во второмъ случаѣ α^p имѣетъ большій порядокъ чѣмъ α^q въ послѣднемъ же случаѣ меньшій. Слѣдовательно:

ЕСЛИ α БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЕТСЯ, ТО ИЗЪ ДВУХЪ ВЕЛИЧИНЪ α^p И α^q ПОРЯДОКЪ ТОЙ БОЛЬШЕ, ПОКАЗАТЕЛЬ КОТОРОЙ БОЛЬШЕ.

Этотъ результатъ позволяетъ ввести болѣе точное понятіе о порядкѣ

Опредѣленіе. ГОВОРЯТЪ, ЧТО БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩАЯСЯ ВЕЛИЧИНА β ПОРЯДКА n ОТНОСИТЕЛЬНО БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩЕЙСЯ ВЕЛИЧИНЫ α, ЕСЛИ ПРЕДѢЛЪ ОТНОШЕНІЯ

$$\frac{\beta}{\alpha^n}$$

КОНЕЧЕНЪ и НЕ РАВЕНЪ НУЛЮ.

СЛѢДОВАТЕЛЬНО, ЕСЛИ β ПОРЯДКА n ОТНОСИТЕЛЬНО α, ТО β И α^n ОДНОГО И ТОГО ЖЕ ПОРЯДКА.

Пусть, напримѣръ

$$y = 1 - \cos x$$

и пусть x безконечно умаляется. Въ такомъ случаѣ y тоже безконечно умаляется. Правило Лопиталя показываетъ, что

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Слѣдовательно, y второго порядка относительно x.

Какъ было указано, о порядкѣ величины можно говорить только по отношенію къ другой величинѣ. Поэтому имѣетъ большое значеніе слѣдующая теорема.

ЕСЛИ ДВѢ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩІЯСЯ ВЕЛИЧИНЫ α И β ОДНОГО И ТОГО ЖЕ ПОРЯДКА n ОТНОСИТЕЛЬНО ТРЕТЬЕЙ ВЕЛИЧИНЫ, ТО ОНѢ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО ДРУГЪ ДРУГА.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\lim \frac{\beta}{\gamma^n} = k \qquad \lim \frac{\alpha}{\gamma^n} = k'$$

гдѣ по условію теоремы, k и k' конечны и не равны нулю. Такъ какъ

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma^n} : \frac{\alpha}{\gamma^n}$$

то

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \frac{k}{k'}$$

гдѣ правая часть конечна и неравна нулю. Слѣдовательно β и α одного порядка. Теорема доказана.

Теорема. ЕСЛИ ДВѢ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩІЯСЯ ВЕЛИЧИНЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫ, ТО ПОРЯДОКЪ РАЗНОСТИ МЕЖДУ НИМИ ВЫШЕ ПОРЯДКА КАЖДОЙ ИЗЪ НИХЪ. ОБРАТНО, ЕСЛИ РАЗНОСТЬ ДВУХЪ ВЕЛИЧИНЪ ИМѢЕТЪ ПОРЯДОКЪ, БОЛЬШІЙ ПОРЯДКА КАЖДОЙ ИЗЪ ЭТИХЪ ВЕЛИЧИНЪ, ТО ЭТИ ВЕЛИЧИНЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫ.

Пусть β и α безконечно умаляются, и пусть

$$\beta = \alpha + \delta$$

Слѣдовательно,

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 + \lim \frac{\delta}{\alpha}$$

Ясно, что если $\beta \approx \alpha$, т.е. если

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 \qquad (1)$$

то

$$\lim \frac{\delta}{\alpha} = 0, \qquad (2)$$

т.е. порядокъ δ выше порядка α.

Обратно, если порядокъ δ выше порядка α, то имѣемъ (2), а потому (1), т.е. $\beta \approx \alpha$.

БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩІЯСЯ ПЛОЩАДИ

Докажемъ нѣсколько леммъ.

1 ЛЕММА. СТОРОНЫ a, b, c ПРЯМОЛИНЕЙНАГО БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩАГОСЯ ТРЕУГОЛЬНИКА СЪ КОНЕЧНЫМИ УГЛАМИ ИМѢЮТЪ ОДИНЪ И ТОТЪ ЖЕ ПОРЯДОКЪ ОТНОСИТЕЛЬНО ДРУГЪ ДРУГА. ПЛОЩАДЬ ЖЕ ЕГО q ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО КАЖДОЙ СТОРОНЫ.

Пусть α, β, γ углы треугольника. Предѣлъ каждаго изъ нихъ по условію теоремы, конеченъ и не равенъ нулю. Имѣемъ

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Такъ какъ въ правой части предѣлъ какъ числителя, такъ и знаменателя не равенъ нулю, то предѣлъ лѣвой части конеченъ и не равенъ нулю, т.е. a и b одного порядка. Далѣе такъ какъ

$$q = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$

то

$$\frac{q}{a^2} = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \sin\gamma = \frac{1}{2} \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Предѣлъ правой части конеченъ и неравенъ нулю, а потому второго порядка относительно a.

2 ЛЕММА. ПЛОЩАДЬ p, ЗАКЛЮЧЕННАЯ МЕЖДУ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩЕЮСЯ ДУГОЮ AB И ЕЯ ХОРДОЙ C ЕСТЬ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩАЯСЯ ВЕЛИЧИНА ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО ХОРДЫ ВЫШЕ ВТОРОГО.

Проведемъ въ концахъ дуги AB касательныя, изъ точки пересѣченія которыхъ опустимъ перпендикуляръ CD на хорду. Черезъ α обозначимъ уголъ между касательной AC и хордой AB, черезъ Δ площадь треугольника ABC. Геометрически ясно, что, если точка B безконечно приближается къ A, то уголъ α безконечно умаляется

хорду или дуги AB въ предѣлѣ совпадаетъ съ касательной AC. Замѣтивъ это и принявъ во вниманіе, что $p < \Delta$ имѣемъ

$$\Delta = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot tg\alpha < \frac{c^2}{2} tg\alpha$$

$$p < \frac{1}{2} c^2 tg\alpha .$$

Слѣдовательно, если дуга AB безконечно умаляется то

$$\lim \frac{p}{c^2} = 0$$

т.е. p относительно c, порядка выше второго.

Теорема. Съ точки зрѣнія эквивалентности площадь безконечно умаляющагося криволин. треугольника съ конечными углами можно разсматривать какъ площадь прямолинейнаго треугольника, считая дуги за отрѣзки прямыхъ, и принимая углы треугольника равными ихъ предѣламъ.

Пусть a, b, c безконечно умаляющіяся дуги, служащія сторонами кривого треугольника; a', b', c' – ихъ хорды, α, β, γ, Δ – углы и площадь треугольника abc; α', β', γ', Δ' – углы и площадь треугольника $a'b'c'$. Черезъ p, q, r обозначимъ площади, заключенныя между дугами a, b, c и соотвѣтствующими имъ хордами a', b', c'. Пусть, наконецъ

$$\lim \alpha = \lim \alpha' = \alpha_1, \quad \lim \beta = \lim \beta' = \beta_1, \quad \lim \gamma = \lim \gamma' = \gamma_1 \qquad (1)$$

Очевидно, что

$$\Delta = \Delta' \pm p \pm q \pm r , \qquad (2)$$

гдѣ надо взять знакъ + или минусъ, смотря потому, обращена ли дуга къ треугольнику вогнутостью или выпуклостью.

Такъ какъ относительно сторонъ a', b', c' площадь Δ' второго порядка а p, q, r выше второго, то

$$\Delta \approx \Delta' \qquad (3)$$

Но

$$\Delta' = \frac{1}{2} a' b' \sin \gamma'$$

Такъ какъ γ' и γ предѣльно равны, то заключаемъ, что

$$\Delta \approx \frac{1}{2} ab \sin\gamma \approx \frac{1}{2} ab \sin\gamma_1$$

Мы видимъ, что при вычисленіи площади треугольника abc его можно разсматривать съ точки зрѣнія эквивалентности какъ прямолинейный.

Это – въ предположеніи, что треугольникъ abc – плоскій. Предположимъ теперь, что мы имѣемъ какую нибудь поверхность и пусть на ней данъ кривой треугольникъ; пусть по прежнему Δ его

... радь; a b, c - стороны a b c - хорды; Δ - площадь треугольника изъ хордъ.

Установивъ систему осей координатъ и обозначая черезъ λ уголъ съ осью Z нормали къ поверхности съ одною площадь вершинъ треугольника abc, мы обозначимъ черезъ A B C проэкціи на плоскость xy дугъ a, b, c, черезъ A' B' C' проэкціи хордъ a' b' c'. Пусть, наконецъ, q площадь треугольника ABC q' площадь треугольника $A'B'C'$. Мы имѣемъ

$$q \approx \Delta \cos\lambda ,$$

и такъ какъ въ предѣлѣ плоскость треугольника abc сливается съ касательною плоскостью въ избранной вершинѣ треугольника abc то

$$q' \approx \Delta' \cos\lambda$$

но $q \approx q'$ а потому

$$\Delta \approx \Delta' \approx \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$

т.е

$$\Delta \approx \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$

Заключеніе прежнее. Мы видимъ, что и кривые треугольники, расположенные на поверхности, можно разсматривать какъ прямолинейные.

Если теперь мы имѣемъ на поверхности многоугольникъ сторонами котораго служатъ дуги, то, проводя дуги - діагонали, мы разобьемъ его на треугольники, а потому:

СЪ ТОЧКИ ЗРѢНІЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВСЯКУЮ БЕЗКОНЕЧНО УМАЛЯЮЩУЮСЯ ПЛОЩАДЬ, ОГРАНИЧЕННУЮ НА КАКОЙ НИБУДЬ ПОВЕРХНОСТИ ДУГАМИ КРИВЫХЪ ЛИНІЙ, МОЖНО РАЗСМАТРИВАТЬ КАКЪ ПЛОСКУЮ, ПРИНИМАЯ ДУГИ ЗА ОТРѢЗКИ ПРЯМЫХЪ

ГЛАВА XIV РАВНОМѢРНО СХОДЯЩІЕСЯ РЯДЫ.

Ряды раздѣляются на два общихъ класса: на числовые ряды и функціональные. Членами первыхъ служатъ числа, членами вторыхъ - функціи

Среди функціональныхъ рядовъ особаго вниманія заслуживаютъ такъ называемые равномѣрно сходящіеся ряды.

ОСТАТОКЪ ЧИСЛОВОГО РЯДА

Пусть S сумма сходящагося числового ряда

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

Разумѣя подъ ... ... число ... это ...

венство въ такомъ видѣ.

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + r_n$$

гдѣ

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$$

Величина r_n называется <u>остаткомъ</u> даннаго ряда остановленнаго на n мѣстѣ. Полагая

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

имѣемъ

$$S = S_n + r_n$$

Пусть n безконечно возрастаетъ. Такъ какъ

$$\lim_{n=\infty} S_n = S$$

то

$$\lim_{n=+\infty} r_n = 0$$

откуда слѣдуетъ, что <u>для всякаго какъ угодно малаго ε всегда можно найти такое p, что</u>

$$|r_n| < \varepsilon$$

<u>для всякомъ $n \geq p$</u>

РАВНОМѢРНО СХОДЯЩІЕСЯ РЯДЫ.

Безконечный рядъ называется функціональнымъ, если членами его служатъ функціи.

Данный функціональный рядъ

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots\ldots \quad (1)$$

можетъ оказаться сходящимся для однихъ значеніи перемѣннаго и расходящимся для другихъ его значеній. <u>Рядъ, сходящійся для всякаго значенія x, лежащаго на интервалѣ (a, b) называется рядомъ сходящимся на интервалѣ (a, b)</u>

Всякіи разъ, какъ x имѣетъ опредѣленное значеніе, при которомъ рядъ (1) сходится, сумма его S имѣетъ то же опредѣленное значеніе. Слѣдовательно: <u>сумма всякаго функціональнаго ряда сходящагося на интервалѣ (a, b) есть нѣкоторая функція, опредѣленная на этомъ интервалѣ.</u>

Мы введемъ теперь чрезвычайно важное понятіе о равномѣрно сходящихся функціональныхъ рядахъ. Пусть

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots \quad (1)$$

рядъ, сходящійся на интервалѣ (a, b) обозначая черезъ $R_n(x)$ остатокъ этого ряда, остановленнаго на n членѣ, имѣемъ

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots + \varphi_n(x) + R_n(x) \quad (2)$$

гдѣ

$$\mathcal{R}_n(x) = \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \varphi_{n+3}(x) + \quad (3)$$

Мыслимъ, что x имѣетъ нѣкоторое числовое значенiе. Когда мы даемъ x какое-нибудь числовое значенiе, то рядъ (1) изъ функцiональнаго ряда обращается въ нѣкоторый числовой рядъ.

Если ε - произвольно взятая, какъ угодно малая положительная величина то, послѣ того, какъ выбрано значенiе для x мы можемъ найти такое p что при всякомъ $n \geqq p$

$$|\mathcal{R}_n(x)| < \varepsilon \quad (4)$$

но при этомъ надо обратить вниманiе на то, что мы должны сначала выбрать значенiе для x, а только потомъ уже искать p. Естественно поэтому, что мы должны ожидать, что значенiе для p при одномъ и томъ же ε будетъ зависѣть отъ того значенiя, которое мы выбрали для x, и что для различныхъ значенiй x будутъ получаться и различныя значенiя для p.

Опредѣленiе. БЕЗКОНЕЧНЫЙ ФУНКЦIОНАЛЬНЫЙ РЯДЪ

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots$$

СХОДЯЩIЙСЯ НА ИНТЕРВАЛѢ (a , b) НАЗЫВАЕТСЯ РАВНОМѢРНО СХОДЯЩИМСЯ РЯДОМЪ НА ИНТЕРВАЛѢ (a , b), ЕСЛИ ДЛЯ ВСЯКАГО, КАКЪ УГОДНО МАЛАГО, ПОЛОЖИТЕЛЬНАГО ε ВСЕГДА МОЖНО НАЙТИ ТАКОЕ ЦѢЛОЕ ЧИСЛО p ОДНО И ТО ЖЕ ДЛЯ ВСЯКАГО x ЧТО

$$|\mathcal{R}_n(x)| < \varepsilon$$

ПРИ ВСЯКОМЪ $n \geq p$

Въ чемъ же отличiе равномѣрно сходящагося ряда отъ просто сходящагося?

Для того и другого ряда можно найти такое p что

$$|\mathcal{R}_n(x)| < \varepsilon \quad \text{при } n \geqq p.$$

Но только для просто сходящагося ряда это p будетъ различно для различныхъ значенiй x. Для ряда же равномѣрно сходящагося оно должно быть одно и то же для всѣхъ значенiй x.

Разсмотримъ, даетъ ли безконечная геометрическая прогрессия

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (1)$$

равномѣрно сходящiйся рядъ или неравномѣрно сходящiйся.

Какъ извѣстно этотъ рядъ сходится, если $|x| < 1$, и расходится, если $|x| \geq 1$. Слѣдовательно, областью сходимости ряда (1) служатъ только точки лежащiя внутри интервала $(-1, +1)$. Имѣемъ

$$\mathcal{R}_n(x) = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \dots$$

По формулѣ для суммы безконечно убывающей геометрической

тоаго ... находимъ, что

$$\mathcal{R}_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$$

Слѣдовательно

$$|\mathcal{R}_n(x)| = \frac{|x|^n}{1-x} \qquad (2)$$

Пусть ε -произвольно взятая положительная величина. Можно ли найти такое p, чтобы имѣло неравенство

$$|\mathcal{R}_n(x)| < \varepsilon \qquad (3)$$

при всякомъ $n > p$ и при всякомъ x?

Допустимъ, что можно. Полагая въ (3) $n = p$ мы тѣмъ самымъ допускаемъ, что есть такое p, что

$$\frac{|x|^p}{1-x} < \varepsilon \qquad (4)$$

для всякой точки x внутри интервала $(-1, +1)$. Но это очевидно невѣрно. Дѣйствительно, разумѣя подъ x положительную величину будемъ x приближать къ единицѣ. Если неравенство (4) вѣрно при всякомъ $x < 1$, то въ предѣлѣ имѣемъ

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x|^n}{1-x} \leqq \varepsilon$$

но это соотношеніе очевидно невѣрно, потому что лѣвая часть его равна $+\infty$. Слѣдовательно, невѣрно и (4), и (3), а потому рядъ (1) внутри всего интервала (-1, +1), будучи сходящимся рядомъ, не есть равномѣрно сходящійся рядъ.

Тѣмъ замѣчательнѣй слѣдующая теорема:

РЯДЪ

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

ЕСТЬ РЯДЪ РАВНОМѢРНО СХОДЯЩІЙСЯ НА ВСЯКОМЪ ИНТЕРВАЛѢ $(-\alpha, +\alpha)$, КОНЦЫ КОТОРАГО ЛЕЖАТЪ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА (-1, +1), ПРИЧЕМЪ ОНИ МОГУТЪ ЛЕЖАТЬ КАКЪ УГОДНО БЛИЗКО КЪ ТОЧКАМЪ -1 И +1, НО НЕ ДОЛЖНЫ СОВПАДАТЬ НИ СЪ ОДНОЙ ИЗЪ НИХЪ.

Беремъ на интервалѣ (-1, +1) точку α какъ угодно близко къ точкѣ +1, но не совпадающую съ ней, и пусть x точка на интервалѣ $(-\alpha, +\alpha)$.

Слѣдовательно $|x| \leqq \alpha$. Имѣемъ

$$|\mathcal{R}_n(x)| = \frac{|x|^n}{1-x} \leqq \frac{|x|^n}{1-|x|}$$

и такъ какъ $|x| \leqq \alpha$, то

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leqq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \qquad (1)$$

Пусть ε произвольно малая положительная величина. Такъ какъ $\alpha < 1$ то выраженіе

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

убываетъ при возрастаніи n, и предѣлъ этого выраженія при $n=\infty$ равенъ нулю. Слѣдовательно необходимо должно быть такое p что

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha} < \varepsilon \quad \text{при всякомъ } n \geq p .$$

Изъ (1) слѣдуетъ что

$$|R_n(x)| < \varepsilon \qquad \text{при } n \geq p$$

и при всякомъ x Но это есть условіе равномѣрной сходимости.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ СУММЫ РАВНОМѢРНО СХОДЯЩАГОСЯ РЯДА

Функція $f(x)$ называется непрерывной въ точкѣ c если

$$\lim_{x=c} f(x) = f(c)$$

т.е. если предѣлъ функціи въ точкѣ c равенъ значенію функціи въ этой точкѣ. Какъ извѣстно, въ точкѣ непрерывности функція обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ.

ЕСЛИ ФУНКЦІЯ $f(x)$ НЕПРЕРЫВНА ВЪ ТОЧКѢ c, ТО ДЛЯ ВСЯКАГО КАКЪ УГОДНО МАЛАГО ПОЛОЖИТЕЛЬНАГО ε МОЖНО НАЙТИ ТАКОЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ η, ЧТО

$$|f(c+h) - f(c)| < \varepsilon \qquad \text{если } |h| < \eta$$

ОБРАТНО. ЕСЛИ ДЛЯ ВСЯКАГО КАКЪ УГОДНО МАЛАГО ПОЛОЖИТЕЛЬНАГО ε МОЖНО НАЙТИ ТАКОЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ η, ЧТО

$$|f(c+h) - f(c)| < \varepsilon \qquad \text{если } |h| < \eta$$

ТО ФУНКЦІЯ $f(x)$ НЕПРЕРЫВНА ВЪ ТОЧКѢ C.

Вспомнивъ это поставимъ себѣ слѣдующій вопросъ если всѣ члены сходящагося ряда

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots$$

непрерывныя функціи, то можетъ ли сумма его $f(x)$ быть прерывной функціей, или она должна быть необходимо непрерывной функціей.

На первый взглядъ кажется что, если всѣ члены сходящагося ряда непрерывныя функціи, то и сумма его тоже должна быть непрерывной функціей. На сколько этотъ взглядъ ошибоченъ показываетъ слѣдующій примѣръ. Пусть

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} \qquad (1)$$

если $x = 0$ то этотъ рядъ обращается въ сходящійся рядъ

$$0 + 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots$$

Если $x \neq 0$ то рядъ (1) есть геометрическая прогрессія со знаменателемъ

$$\frac{1}{1 + x^2}$$

который меньше единицы. Слѣдовательно и въ этомъ случаѣ рядъ (1) сходящійся.

Такимъ образомъ рядъ (1) есть рядъ, сходящійся при всякомъ x. Сумма его опредѣляетъ нѣкоторую функцію $f(x)$.

Если $x \neq 0$, то по формулѣ для суммы геометрической прогрессіи, имѣемъ

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1 + x^2}} = 1 + x^2 \qquad (2)$$

Эта формула не применима, если $x = 0$ потому что въ этомъ случаѣ знаменатель прогрессіи равенъ единицѣ. Формула же для суммы убывающей геометрической прогрессіи доказывается только для случая, когда модуль знаменателя меньше единицы. Но, если $x = 0$, то мы прямо находимъ, что

$$f(0) = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

Итакъ

$$f(x) = 1 + x^2 \quad \text{если} \quad x \neq 0 \qquad (3)$$

$$f(0) = 0 \qquad (4)$$

Изъ равенства (3) справедливаго при всякомъ $x \neq 0$ мы заключаемъ что

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

въ то же время

$$f(0) = 0$$

Слѣдовательно, предѣлъ функціи $f(x)$ въ точкѣ $x = 0$ не равенъ значенію функціи въ этой точкѣ а потому <u>функція $f(x)$ прерывна въ точкѣ $x = 0$</u>

Мы видимъ, что сумма ряда, все члены котораго непрерывныя функціи, можетъ давать прерывную функцію.

Какимъ геометрическимъ образомъ изобразится функція $f(x)$?

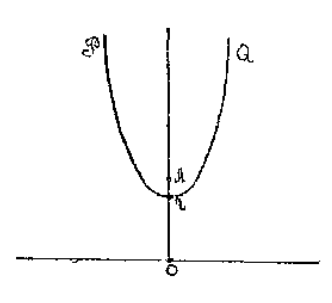
Пусть

$$y = f(x)$$

Слѣдовательно

$$y = 1 + x^2 \quad \text{если} \quad x \neq 0 \qquad (5)$$

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$



Пусть A точка на оси y ордината которой равна +1. Уравненіе (5) есть уравненіе параболы, вершина которой лежитъ въ точкѣ A. Слѣдовательно, функція $f(x)$ изображается параболой для всякаго $x \neq 0$. Но при $x = 0$ значеніе функціи $f(x)$ изображается не ординатой параболы, а началомъ координатъ. Теперь ясно, что функція $f(x)$ изображается параболой, изъ которой выкинута точка A эта точка замѣнена началомъ координатъ.

<u>Теорема.</u> ЕСЛИ РЯДЪ

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots \qquad (1)$$

ЧЛЕНЫ КОТОРАГО НЕПРЕРЫВНЫЯ ФУНКЦІИ, СХОДИТСЯ ВЪ ИНТЕРВАЛѢ (a b) РАВНОМѢРНО, ТО СУММА ЕГО ЕСТЬ НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦІЯ

Обозначая черезъ $R_n(x)$ остатокъ ряда, имѣемъ

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots + \varphi_n(x) + R_n(x) \qquad (2)$$

Пусть c — нѣкоторая точка на интервалѣ (a b), и пусть ε произвольно взятая положительная величина. Такъ какъ рядъ равномѣрно сходящійся то можно найти такое p что

$$|R_p(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{при всякомъ } x \qquad (3)$$

Полагая что p взято такимъ и что для сокращенія письма

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots + \varphi_p(x) \qquad (4)$$

послѣдовательно имѣемъ

$$f(x) = \psi(x) + R_p(x)$$

$$f(c) = \psi(c) + R_p(c)$$

$$f(x) - f(c) = \psi(x) - \psi(c) + R_p(x) - R_p(c),$$

$$|f(x) - f(c)| \leq |\psi(x) - \psi(c)| + |R_p(x)| + |R_p(c)| \qquad (5)$$

Какъ сумма конечнаго числа непрерывныхъ функцій, функція $\psi(x)$ непрерывна. Поэтому мы можемъ найти такое η что

$$|\psi(x) - \psi(c)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{если } |x - c| < \eta \qquad (6)$$

Кромѣ того изъ (3) слѣдуетъ, что $|R_p(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$ а по сему

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{если } |x - c| < \eta \qquad (7)$$

Такъ какъ ε взято произвольно, то слѣдовательно функція $f(x)$ непрерывна въ всякой точкѣ c интервала (a b) тео

рема доказана. *)

ИНТЕГРИРОВАНІЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЕ РАВНОМѢРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВЪ

<u>Теорема.</u> ЕСЛИ РЯДЪ ИЗЪ НЕПРЕРЫВНЫХЪ ФУНКЦІЙ

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots \qquad (1)$$

ЕСТЬ РЯДЪ, РАВНОМѢРНО СХОДЯЩІЙСЯ ВЪ ИНТЕРВАЛѢ (a , b), ТО ЕГО МОЖНО ИНТЕГРИРОВАТЬ ПО-ЧЛЕННО.

Требуется доказать что

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx + \int_\alpha^\beta \varphi_2(x)\,dx + \int_\alpha^\beta \varphi_3(x)\,dx + \ldots, \qquad (2)$$

гдѣ α и β какія угодно точки на интервалѣ (a, b).

Пусть ε и ε' двѣ произвольно взятыхъ положительныхъ величины.

Какое бы ни было ε можно найти такое p, что при всякомъ x,

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad \text{если} \quad n > p \qquad (3)$$

Предполагая, что $n > p$ имѣемъ:

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + R_n(x)$$

а потому

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx + \int_\alpha^\beta \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int_\alpha^\beta \varphi_n(x)\,dx + r_n \qquad (4)$$

гдѣ

$$r_n = \int_\alpha^\beta R_n(x)\,dx$$

Примѣняя теорему о среднемъ значеніи интеграла имѣемъ

$$r_n = R_n(\xi)(\beta - \alpha)$$

Принимая во вниманіе (3) заключаемъ, что

$$|r_n| < \varepsilon' |\beta - \alpha| \quad \text{если} \quad n \geq p \qquad (5)$$

Какое бы ни было $\varepsilon > 0$ мы всегда могли бы взять

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{|\beta - \alpha|}$$

При такомъ выборѣ ε' изъ (5) слѣдуетъ, что какое бы мало ни было ε всегда можно найти такое p, что

$$|r_n| < \varepsilon \quad \text{если} \quad n \geq p .$$

*) *Гдѣ при доказательствѣ опираемся на равномѣрную сходимость*

Это значитъ, что, если n безконечно возрастаетъ, то r_n безконечно умаляется. Слѣдовательно

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 \qquad (6$$

Зная это, условимся, что въ равенствѣ (4 n безконечно возрастаетъ. Переходя къ предѣлу, получимъ равенство (2). Теорема доказана.

Задача. Въ какомъ мѣстѣ доказательства приходится опираться на то, что рядъ (1) есть равномѣрно сходящійся рядъ?

Теорема. ЕСЛИ РЯДЪ, СОСТАВЛЕННЫЙ ИЗЪ ПРОИЗВОДНЫХЪ ОТЪ ЧЛЕНОВЪ ДАННАГО РЯДА, РАВНОМѢРНО СХОДЯЩАГОСЯ НА ИНТЕРВАЛѢ (a, b), ЕСТЬ ТОЖЕ РАВНОМѢРНО СХОДЯЩІЙСЯ РЯДЪ, ПРИЧЕМЪ ВСѢ ЧЛЕНЫ ЭТО НЕПРЕРЫВНЫЯ ФУНКЦІИ, ТО ДАННЫЙ РЯДЪ МОЖНО ПО-ЧЛЕННО ДИФФЕРЕНЦИРОВАТЬ.

Дано, что рядъ

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots \qquad (1)$$

равномѣрно сходится на интервалѣ (a, b), причемъ всѣ члены его, а также и ихъ производныя непрерывны. Кромѣ того дано, что рядъ

$$\varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) + \varphi_3'(x) + \dots \qquad (2)$$

тоже равномѣрно сходится на интервалѣ (a, b). Требуется доказать, что

$$f'(x) = \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) + \varphi_3'(x) + \dots \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть

$$\psi(x) = \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) + \varphi_3'(x) + \dots \qquad (4$$

Такъ какъ рядъ (2) есть равномѣрно сходящійся, то $\psi(x)$ непрерывная функція. Кромѣ того, по предыдущей теоремѣ мы можемъ рядъ (4) интегрировать по-членно. Имѣемъ:

$$\int_a^x \psi(x)\,dx = \int_a^x \varphi_1'(x)\,dx + \int_a^x \varphi_2'(x)\,dx + \int_a^x \varphi_3'(x)\,dx + \dots =$$

$$= \{\varphi_1(x) - \varphi_1(a)\} + \{\varphi_2(x) - \varphi_2(a)\} + \{\varphi_3(x) - \varphi_3(a)\} + \dots$$

Принимая во вниманіе (1), заключаемъ, что

$$\int_a^x \psi(x)\,dx = f(x) - f(a)$$

Дифференцируя это равенство, мы видимъ, что

$$\psi(x) = f'(x)$$

Слѣдовательно, равенство (3) доказано. Теорема доказана.

Необходимо замѣтить, что, прежде чѣмъ мы не убѣдимся, что

рядъ, получаемый отъ почленнаго дифференцированія, есть равномѣрно сходящійся рядъ мы никогда не имѣемъ права дифференцировать данный рядъ. Въ этомъ можно убѣдиться на слѣдующемъ примѣрѣ Пусть

$$\omega(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 4x}{4^2} + \qquad (5)$$

Всѣ члены этого ряда по абсолютной величинѣ соотвѣтственно меньше членовъ слѣдующаго положительнаго ряда.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} +$$

Этотъ рядъ сходящійся, а потому и рядъ (5) сходится при всякомъ x. Но продифференцируемъ его по-членно Получимъ рядъ

$$\omega(x) = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{4} + \qquad (6)$$

Легко видѣть, что это равенство не можетъ быть справедливымъ при всякомъ x потому что полагая $x = 0$ мы получимъ гармоническій рядъ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

который, какъ извѣстно, есть расходящійся. Слѣдовательно рядъ (5) нельзя дифференцировать по-членно

РАЗЛОЖЕНІЕ $\lg(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$

Пусть $|x| < 1$ Имѣемъ

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \qquad (1)$$

Мы видѣли что геометрическая прогрессія есть рядъ, равномѣрно сходящійся въ интервалѣ (0 x), а потому мы можемъ рядъ (1) интегрировать по-членно Имѣемъ:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x dx - \int_0^x x\,dx + \int_0^x x^2 dx - \int_0^x x^3 dx +$$

т е

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$$

если $|x| < 1$

Далѣе замѣняя въ (1) x черезъ x^2 послѣдовательно имѣемъ

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 -$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx \quad \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x\,dx - \int_0^x x^6 \cdot x +$$

а потому, если $|x|<1$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКІЕ РЯДЫ.

Тригонометрическимъ рядомъ называется всякій рядъ вида

$$a_0 + (a_1\cos x + b_1 \sin x) + (a_2\cos 2x + b_2 \sin 2x) + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \dots +$$
$$+ (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) + \dots$$

Эти ряды часто встрѣчаются въ различныхъ изслѣдованіяхъ физики. Первымъ они были введены въ науку Фурье, а потому часто называются также рядами Фурье. Замѣчательны они тѣмъ, что оказывается что въ нихъ можно разложить всякую функцію, даже прерывную, потому что существуетъ слѣдующая теорема:

ВСЯКАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ФУНКЦІЯ $f(x)$, ДАЖЕ ПРЕРЫВНАЯ, МОЖЕТЪ БЫТЬ РАЗЛОЖЕНА ВЪ ИНТЕРВАЛѢ $(-\pi, +\pi)$ ВЪ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКІЙ РЯДЪ ВИДА.

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$$

ПРИЧЕМЪ ЭТО РАВЕНСТВО СПРАВЕДЛИВО ДЛЯ ВСЯКОЙ ТОЧКИ x, ЛЕЖАЩЕЙ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА $(-\pi, \pi)$, ВЪ КОТОРОЙ ФУНКЦІЯ НЕПРЕРЫВНА.

ДЛЯ ТОЧЕКЪ ВНѢ ИНТЕРВАЛА И КОНЦОВЪ ЕГО, А ТАКЖЕ И ДЛЯ ТОЧЕКЪ ПРЕРЫВНОСТИ ЭТО РАВЕНСТВО ВООБЩЕ ГОВОРЯ, НЕ ИМѢЕТЪ МѢСТА *)

Мы примемъ эту теорему безъ доказательства, въ виду его сложности. Вообще изученіе тригонометрическихъ рядовъ требуетъ очень тонкихъ пріемовъ и, можно сказать, составляетъ особый отдѣлъ математики во всякомъ случаѣ особую и очень обширную главу ея.

Мы поставимъ себѣ слѣдующую задачу: допуская возможность разложенія функціи въ тригонометрическій рядъ, вычислить коэффиціенты его Для этого выведемъ сначала вспомогательныя формулы.

Пользуясь извѣстными изъ тригонометріи равенствами:

$$\sin px \cos qx = \frac{1}{2}\sin(p+q)x + \frac{1}{2}\sin(p-q)x$$
$$\cos px \cos qx = \frac{1}{2}\cos(p+q)x + \frac{1}{2}\cos(p-q)x$$
$$\sin px \sin qx = -\frac{1}{2}\sin(p+q)x + \frac{1}{2}\sin(p-q)x$$

---

*) Функція называется ограниченной въ интервалѣ (a, b), если модуль ея меньше нѣкотораго положительнаго числа, т.е. если есть такое M, что $|f(x)| \leq M$ при всякомъ x. Напримѣръ, $\sin x$ — ограниченная функція

чи, разные, гдѣ m и n цѣлыя положительныя числа безъ особаго труда вычислимъ слѣдующіе интегралы:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\,dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ \pi & \text{если } m = n \end{cases} \qquad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{если } m \neq n \\ \pi & \text{если } m = n \end{cases}$$

Возьмемъ теперь, по предположенію существующее равенство

$$f(x) = a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + (a_3\cos 3x + b_3\sin 3x) + \ldots \qquad (2)$$

Умножимъ его на dx и интегрируя по-членно правую часть въ предѣлахъ отъ $-\pi$ до $+\pi$ найдемъ, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 \qquad (3)$$

Множимъ теперь 2) на $\cos(nx)$ и интегрируемъ въ предѣлахъ отъ $-\pi$ до $+\pi$. Въ правой части получимъ сумму членовъ типа:

$$a_m\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx + b_m\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx$$

Принимая во вниманіе (1), мы видимъ, что всѣ эти члены равны нулю за исключеніемъ члена при $m=n$, а потому

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \pi a_n$$

Умножая же 2) на $\sin(nx)$ найдемъ, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \pi b_n$$

При этомъ мы допускаемъ, что рядъ (2) можно по-членно интегрировать.

Получаемъ слѣдующій результатъ.

ВСЯКАЯ ФУНКЦІЯ $f(x)$ ВЪ ИНТЕРВАЛѢ $(-\pi, \pi)$ МОЖЕТЪ БЫТЬ РАЗЛОЖЕНА ВЪ РЯДЪ

$$f(x) = a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \ldots$$

ПРИЧЕМЪ ЭТО РАВЕНСТВО [illegible] ДЛЯ [illegible] ТОЧЕКЪ НЕПРЕРЫВНОСТИ, КОЭФФИЦІЕНТЫ [illegible] ОПРЕДѢЛЯЮТСЯ ПО ФОРМУЛАМЪ:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (4)$$

Пусть напримѣръ, намъ дана слѣдующая функція:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \quad \text{если} \quad 0 < x < \pi$$

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{если} \quad -\pi < x < 0$$

Слѣдовательно, въ интервалѣ $(0, \pi)$ эта функція изображается отрѣзкомъ AB, а въ интервалѣ $(-\pi, 0)$ отрѣзкомъ CD. А во всемъ интервалѣ $(-\pi, \pi)$ она прерывна, именно прерывна въ точкѣ $x = 0$.

Примѣняя формулы (4), мы при вычисленіи интеграловъ, в виду прерывности подынтегральной функціи, должны разбивать ихъ на отдѣльные интегралы. Имѣемъ

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{\pi}{4}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{\pi}{4}\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\cos(nx)\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{\pi}{4}\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin(nx)\,dx = \frac{1-\cos n\pi}{2n}$$

а потому, смотря по тому, четный индексъ или нѣтъ

$$b_{2k} = 0 \qquad b_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$$

Получаемъ слѣдующій красивый результатъ: если $0 < x < \pi$, то

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \qquad (5)$$

<u>Задача</u>. Показать, что принимая $f(x) = \frac{\pi}{4}$ во всемъ интервалѣ $(-\pi, +\pi)$ получимъ весьма поучительный и интересный рядъ, замѣчательный въ то же время по своей поразительной простотѣ.

ГЛАВА XV. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

Когда мы вводили понятіе объ обобщенныхъ интегралахъ, то мы тогда же убѣдились, что обобщенные интегралы не всегда существуютъ. При этомъ въ томъ случаѣ, когда мы можемъ вычислить соотвѣтствующій неопредѣленный интегралъ вопросъ о существованіи обобщеннаго интеграла рѣшается очень просто. Но такъ какъ найти неопредѣленный интегралъ мы можемъ сравнительно въ рѣдкихъ случаяхъ то возникаетъ задача объ изысканіи методовъ ко-

торые давали бы возможность безъ предварительнаго вычисленія неопредѣленнаго интеграла, заключать о существованіи или не существованіи обобщеннаго интеграла только изъ свойствъ подынтегральной функціи.

Если интервалъ интеграціи конеченъ и если функція $f(x)$ прерывна внутри интервала въ точкахъ c, c_2, c_n, то по опредѣленію

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c + \int_{c_1}^{c_2} + \int_{c_2}^{c_3} + \dots + \int_{c_n}^{b}$$

при условіи, что каждый интегралъ правой части существуетъ. Слѣдовательно, задача о признакахъ существованія интеграловъ отъ функцій, прерывныхъ внутри интервала, сводится къ задачѣ о признакахъ существованія интеграловъ отъ функцій, прерывныхъ только на концахъ интервала интеграціи.

Но если функція $f(x)$ прерывна только на концахъ интервала $(a\ b)$ и если c какая нибудь точка внутри этого интервала, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

и интегралъ лѣвой части существуетъ, если существуютъ интегралы правой части. Но такъ какъ каждый изъ этихъ интеграловъ есть интегралъ отъ функціи, прерывной только на одномъ концѣ интервала, то мы видимъ, что задача о существованіи интеграловъ отъ прерывныхъ функцій въ томъ случаѣ когда интервалъ интеграціи конеченъ, всегда можетъ быть приведена къ задачѣ о существованіи интеграловъ отъ функцій прерывныхъ только на одномъ концѣ интервала.

Далѣе, такъ какъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} + \int_{c}^{+\infty}$$

и интегралъ лѣвой части существуетъ, если существуютъ интегралы правой части, то задачу о существованіи интеграловъ съ двумя безконечными предѣлами мы можемъ ограничить разсмотрѣніемъ интеграловъ только съ однимъ безконечнымъ предѣломъ.

Въ результатѣ мы видимъ, что для рѣшенія вопроса о существованіи обобщенныхъ интеграловъ мы должны изслѣдовать вопросъ о сходимости интеграловъ только двухъ слѣдующихъ типовъ: интеграловъ отъ функцій, прерывныхъ только на одномъ изъ предѣловъ интеграла, и интеграловъ только съ однимъ безконечнымъ предѣломъ.

СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛА ВЪ ОБЛАСТИ ТОЧКИ ПРЕРЫВНОСТИ

Пусть подынтегральная функція $f(x)$ прерывна только при верхнемъ предѣлѣ интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

Возможны два случая: или $a<b$ или $a>b$. Оба эти случая будемъ разсматривать одновременно. По опредѣленію

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

гдѣ ε положительно, если $a<b$, и отрицательно, если $a>b$.

Пусть c-точка внутри интервала (a, b). Эта точка можетъ быть взята какъ угодно близко къ точкѣ b, только не должна съ нею совпадать. Пусть

$$G = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad H = \int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна на всемъ интервалѣ $(a, b-\varepsilon)$, то

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (1)$$

Переходимъ къ предѣлу, предполагая что ε безконечно умаляется. Имѣемъ

$$\lim G = \int_a^c f(x)dx + \lim H \qquad (2)$$

Слѣдовательно, если H имѣетъ конечный предѣлъ, то и G имѣетъ тоже конечный предѣлъ. Обратно, если G имѣетъ конечный предѣлъ, то его имѣетъ и H. Слѣдовательно интегралы G и H одновременно или имѣютъ конечные предѣлы или ихъ не имѣютъ. Иными словами это значитъ, что обобщенные интегралы

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x)dx$$

всегда одновременно существуютъ или не существуютъ. Получаемъ теорему:

ЕСЛИ ПОДЫНТЕГРАЛЬНАЯ ФУНКЦІЯ ПРЕРЫВНА ТОЛЬКО ПРИ ВЕРХНЕМЪ ПРЕДѢЛѢ ИНТЕГРАЛА, ТО ИНТЕГРАЛЫ

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x)dx$$

где точка с можетъ быть взята какъ угодно близко къ точкѣ b, всегда существуютъ или не существуютъ одновременно

Слѣдовательно, вопросъ о сходимости интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

сводится къ вопросу о сходимости интеграла

$$\int_c^b f(x)dx$$

причемъ при изслѣдованіи сходимости этого интеграла мы можемъ брать точку с произвольно близко къ точкѣ b.

Условимся въ слѣдующемъ способѣ выраженія:

ЕСЛИ КАКОЕ-НИБУДЬ УТВЕРЖДЕНІЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНТЕРВАЛА (c, b) СПРАВЕДЛИВО, КАКЪ БЫ БЛИЗКО ТОЧКА с НЕ БЫЛА ВЗЯТА КЪ ТОЧКѢ b, Т.Е. ЕСЛИ ДАННОЕ УТВЕРЖДЕНІЕ СПРАВЕДЛИВО ОТНОСИТЕЛЬНО ВСЯКАГО ДОСТАТОЧНО МАЛАГО ИНТЕРВАЛА (c, b) СЪ КОНЦОМЪ ВЪ ТОЧКѢ b, ТО МЫ БУДЕМЪ ГОВОРИТЬ, ЧТО ДАННОЕ УТВЕРЖДЕНІЕ СПРАВЕДЛИВО ОТНОСИТЕЛЬНО ОБЛАСТИ ТОЧКИ b.

При такомъ способѣ выраженія мы можемъ доказанную теорему формулировать такъ:

ЕСЛИ ФУНКЦІЯ $f(x)$ ПРЕРЫВНА ТОЛЬКО ВЪ ТОЧКѢ b, ТО СУЩЕСТВОВАНІЕ ИЛИ НЕСУЩЕСТВОВАНІЕ ИНТЕГРАЛА ВО ВСЕМЪ ИНТЕРВАЛѢ (a, b) ЗАВИСИТЪ ОТЪ СУЩЕСТВОВАНІЯ ИЛИ НЕСУЩЕСТВОВАНІЯ ЕГО ВЪ ОБЛАСТИ ТОЧКИ b

Эта область, смотря по обстоятельствамъ, можетъ лежать или справа, или слѣва отъ точки b

ИЗЪ ДОКАЗАННОЙ ТЕОРЕМЫ ЗАКЛЮЧАЕМЪ, ЧТО, СУЩЕСТВОВАНІЕ ИЛИ НЕСУЩЕСТВОВАНІЕ ИНТЕГРАЛА ОТЪ ФУНКЦІИ, ПРЕРЫВНОЙ ТОЛЬКО НА ОДНОМЪ КОНЦѢ ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРАЦІИ, ЗАВИСИТЪ НЕ ОТЪ СВОЙСТВЪ ФУНКЦІИ ВО ВСЕМЪ ИНТЕРВАЛѢ ИНТЕГРАЦІИ, А ТОЛЬКО ОТЪ СВОЙСТВЪ ФУНКЦІИ ВЪ ОБЛАСТИ ТОЧКИ ПРЕРЫВНОСТИ, Т.Е. ОТЪ СВОЙСТВЪ ФУНКЦІИ ВО ВСЯКОМЪ ДОСТАТОЧНО МАЛОМЪ ИНТЕРВАЛѢ ОКОЛО ТОЧКИ ПРЕРЫВНОСТИ.

Мы докажемъ теперь, что подобные же результаты получатся и для интеграловъ съ безконечными предѣлами.

По опредѣленію

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)dx$$

при условіи, что предѣлъ правой части существуетъ.

Возьмемъ произвольно число с, какъ угодно большое

КОГДА МОЖНО ВЗЯТЬ КАКЪ УГОДНО БОЛЬШОЕ ЧИСЛО с ТО МЫ УСЛО

вимся говорить, что можно точку c взять какъ угодно близко къ $+\infty$

Точно также, если мы можемъ взять отрицательное число c какъ угодно большое по абсолютной величинѣ, то мы будемъ говорить что точку c можно взять какъ угодно близко къ точкѣ $-\infty$.

Также условимся и въ слѣдующемъ:

Если какое-либо утвержденіе справедливо о всякомъ интервалѣ (c , $+\infty$), какъ бы велико не было c , то мы будемъ говорить, что данное утвержденіе справедливо относительно области точки $+\infty$

Если же какое либо утвержденіе справедливо о всякомъ интервалѣ ($-\infty$, c), гдѣ отрицательное число c можетъ быть какъ угодно велико по абсолютной величинѣ, то мы будемъ говорить, что данное утвержденіе справедливо относительно всякой области точки $-\infty$.

Замѣтивъ эти способы выраженія, предположимъ что c произвольно взятое достаточно большое число. Имѣемъ равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (1)$$

Пусть b безконечно возрастаетъ Заключаемъ что интегралы

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x)dx$$

оба одновременно имѣютъ или не имѣютъ конечные предѣлы Слѣдовательно, интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

одновременно существуютъ или не существуютъ.

Подобнымъ же образомъ заставляя въ равенствѣ (1) верхній предѣлъ стремиться къ $-\infty$ мы заключаемъ что интегралы

$$\int_a^{-\infty} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_c^{-\infty} f(x)dx$$

существуютъ или не существуютъ всегда одновременно Получаемъ теорему:

Какъ бы ни было велико c интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

всегда существуютъ или не существуютъ одновременно

ТОЧНО ТАКЖЕ, КАКЪ БЫ НИ БЫЛО ВЕЛИКО ПО АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО c ИНТЕГРАЛЫ

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

ВСЕГДА СУЩЕСТВУЮТЪ ИЛИ НЕ СУЩЕСТВУЮТЪ ОДНОВРЕМЕННО

Иначе эту теорему можно формулировать такъ:

СУЩЕСТВОВАНІЕ ИЛИ НЕСУЩЕСТВОВАНІЕ ИНТЕГРАЛА

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

ЗАВИСИТЪ ОТЪ СУЩЕСТВОВАНІЯ ИЛИ НЕСУЩЕСТВОВАНІЯ ЕГО ВЪ ОБЛАСТИ ТОЧКИ $+\infty$.

СУЩЕСТВОВАНІЕ ИЛИ НЕСУЩЕСТВОВАНІЕ ИНТЕГРАЛА

$$\int_a^{-\infty} f(x)\,dx$$

ЗАВИСИТЪ ОТЪ СУЩЕСТВОВАНІЯ ИЛИ НЕСУЩЕСТВОВАНІЯ ИНТЕГРАЛА ВЪ ОБЛАСТИ ТОЧКИ $-\infty$

Если мы теперь условимся называть критическими точками точки прерывности, а также точки $+\infty$ и $-\infty$, то мы видимъ, что наши изслѣдованія приводятъ насъ къ слѣдующему общему выводу:

СХОДИМОСТЬ ИЛИ НЕСХОДИМОСТЬ ОБОБЩЕННАГО ИНТЕГРАЛА НА ВСЕМЪ ИНТЕРВАЛѢ ЗАВИСИТЪ ОТЪ СХОДИМОСТИ ИЛИ РАСХОДИМОСТИ ЕГО ВЪ ОБЛАСТИ КАЖДОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ.

Иными словами:

СХОДИМОСТЬ ОБОБЩЕННАГО ИНТЕГРАЛА ЗАВИСИТЪ НЕ ОТЪ СВОЙСТВЪ ФУНКЦІИ НА ВСЕМЪ ИНТЕРВАЛѢ, НО ТОЛЬКО ОТЪ СВОЙСТВЪ ФУНКЦІИ ВЪ ОБЛАСТИ КАЖДОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ.

Этотъ результатъ чрезвычайно важенъ. Во всемъ интервалѣ функція можетъ обладать гораздо болѣе сложными свойствами, чѣмъ въ области какой-либо точки. Такъ, напримѣръ, функція, изображенная кривой на чертежѣ, принимаетъ во всемъ интервалѣ какъ положительныя, такъ и отрицательныя значенія, но въ области точки b она положительна.

ЛЕММА

ЕСЛИ ВЪ ОБЛАСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ a КОНЕЧНОЙ ИЛИ БЕЗКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ, КАЖДАЯ ИЗЪ ФУНКЦІЙ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ СОХРАНЯЕТЪ ОДИНЪ И ТОТЪ ЖЕ ЗНАКЪ, ПРИЧЕМЪ ФУНКЦІЯ $\varphi(x)$ ИМѢЕТЪ

ВЪ ТОЧКѢ c КОНЕЧНЫЙ ПРЕДѢЛЪ, ТО ИНТЕГРАЛЪ

$$\int \varphi(x)\psi(x)\,dx \qquad (1)$$

ВЪ ОБЛАСТИ ТОЧКИ c ЗАВѢДОМО СУЩЕСТВУЕТЪ, ЕСЛИ ВЪ ЭТОЙ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВУЕТЪ ИНТЕГРАЛЪ

$$\int \psi(x)\,dx \qquad (2)$$

ЕСЛИ, КРОМѢ ТОГО, ПРЕДѢЛЪ ФУНКЦІИ $\varphi(x)$ ВЪ ТОЧКѢ c НЕ ТОЛЬКО КОНЕЧЕНЪ, НО И ОТЛИЧЕНЪ ОТЪ НУЛЯ, ТО ОБА ИНТЕГРАЛА (1) И (2) СУЩЕСТВУЮТЪ ИЛИ НЕ СУЩЕСТВУЮТЪ ОДНОВРЕМЕННО. СЛѢДОВАТЕЛЬНО, ИНТЕГРАЛЪ (1) ВЪ ТОЧКѢ c БУДЕТЪ СХОДЯЩИМСЯ ИЛИ РАСХОДЯЩИМСЯ, СМОТРЯ ПОТОМУ, КАКИМЪ БУДЕТЪ ВЪ ЭТОЙ ТОЧКѢ ИНТЕГРАЛЪ (2).

Такъ какъ функція $\varphi(x)$ имѣетъ въ точкѣ c конечный предѣлъ, то можно найти такое положительное число M, чтобы при всякомъ x имѣло мѣсто неравенство

$$\varphi(x) < M \qquad (3)$$

Дѣйствительно если бы нельзя было найти такого числа M то это значило бы, что, какое бы, какъ угодно большое число M мы не взяли, всегда при нѣкоторомъ значеніи x, функція принимала бы значеніе большее M, т.е. значило бы, что функція $\varphi(x)$ была бы безконечно возрастающей, и, слѣдовательно она не могла бы имѣть конечный предѣлъ.

Итакъ существуетъ такое число M, что неравенство (3) имѣетъ мѣсто.

Предположимъ, что функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ положительны Въ такомъ случаѣ

$$\varphi(x)\psi(x) < M\psi(x)$$

Какъ мы знаемъ интегралъ (1) существуетъ, если существуетъ (2)

Если бы одна изъ функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, или даже обѣ были отрицательны, то заключеніе было бы то же, потому что у отрицательной функціи достаточно было бы измѣнить знакъ

Итакъ, теорема доказана, если предѣлъ функціи $\varphi(x)$ конеченъ. Предположимъ теперь, что онъ кромѣ того неравенъ нулю Замѣчая, что въ такомъ случаѣ $\frac{1}{\varphi(x)}$ имѣетъ конечный предѣлъ, и что

$$\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\,\varphi(x)\psi(x)$$

мы, опираясь на первую половину теоремы, заключаемъ, что интегралъ (2) существуетъ, если существуетъ (1).

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВЪ

Предположимъ, что функція $f(x)$ въ интервалѣ $(c, +\infty)$

всегда остается больше нѣкоторой положительной величины m. Но если

$$f(a) > m$$

и $a < b$ то

$$\int_a^b f(x)dx > m(b-a)$$

Если b безконечно возрастаетъ, то правая часть, а потому и лѣвая часть тоже безконечно возрастаетъ. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ обобщеннаго интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

не существуетъ. Поэтому, если интегралъ (1) существуетъ, то функція $f(x)$ не можетъ принимать значенія, которыя всѣ больше нѣкотораго одного и того же положительнаго числа. Иначе это значитъ что, если интегралъ (1) существуетъ, то, какое бы мы не взяли положительное число m, всегда, при безконечномъ возрастаніи x, функція должна принимать значенія, меньшія этого произвольно взятаго m, т. е. функція необходимо должна приближаться какъ угодно близко къ нулю. Въ виду этой необходимости мы ограничимся при изслѣдованіи сходимости интеграловъ типа (1) только тѣмъ случаемъ, когда при безконечномъ возрастаніи x функція $f(x)$ безконечно умаляется, т. е. имѣетъ предѣломъ нуль.

Но безконечно умаляться функція можетъ съ различной быстротой. Это приводитъ къ понятію о порядкѣ умаленія функціи.

<u>ОПРЕДѢЛЕНІЕ</u>. ЕСЛИ ПРЕДѢЛЪ ВЫРАЖЕНІЯ

$$x^m f(x) \qquad (1)$$

ПРИ $x=+\infty$ (ИЛИ $-\infty$) КОНЕЧЕНЪ И НЕРАВЕНЪ НУЛЮ, ТО ГОВОРЯТЪ, ЧТО ФУНКЦІЯ $f(x)$ ИМѢЕТЪ ВЪ ТОЧКѢ $+\infty$ (ИЛИ ВЪ ТОЧКѢ $-\infty$) ПОРЯДОКЪ МАЛОСТИ РАВНЫЙ m.

ЕСЛИ ЖЕ ПРЕДѢЛЪ ВЫРАЖЕНІЯ (1) РАВЕНЪ НУЛЮ, ТО ГОВОРЯТЪ, ЧТО ПОРЯДОКЪ МАЛОСТИ ФУНКЦІИ ВЪ ТОЧКѢ $+\infty$ ИЛИ $-\infty$ БОЛЬШЕ m. НАПРОТИВЪ ЭТОТЪ ПОРЯДОКЪ СЧИТАЮТЪ МЕНЬШЕ m, ЕСЛИ ПРЕДѢЛЪ ВЫРАЖЕНІЯ (1) БЕЗКОНЕЧЕНЪ.

Изслѣдуемъ теперь, когда интегралъ

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$$

существуетъ. Замѣчая, что

$$\int_a^b \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{(1-m)b^{m-1}} - \frac{1}{(1-m)a^{m-1}}, \qquad \int_a^b \frac{dx}{x} = lg\,b - lg\,a$$

и заставляя l безконечно возрастать, заключаемъ, что интегралъ

$$\int^{+\infty}\frac{dx}{x^m} \qquad (1)$$

въ области $+\infty$ существуетъ, если $m>1$ если же $m<1$, то не существуетъ.

Теперь имѣемъ теорему: ИНТЕГРАЛЪ

$$\int^{+\infty}f(x)dx \qquad (2)$$

ВЪ ОБЛАСТИ $+\infty$ СУЩЕСТВУЕТЪ, ЕСЛИ ПОРЯДОКЪ МАЛОСТИ ФУНКЦІИ ВЪ ТОЧКѢ $+\infty$ БОЛЬШЕ ЕДИНИЦЫ; ЕСЛИ ПОРЯДОКЪ МЕНЬШЕ ИЛИ РАВЕНЪ ЕДИНИЦѢ, ТО ИНТЕГРАЛА НЕ СУЩЕСТВУЕТЪ.

Пусть m-порядокъ функціи. Имѣемъ

$$\int^{+\infty}f(x)dx=\int^{+\infty}x^m f(x)\ \frac{dx}{x^m}$$

Такъ какъ множитель $x^m f(x)$ имѣетъ конечный, неравный нулю, предѣлъ, то интегралы (1) и (2) существуютъ или не существуютъ одновременно.

Теорема доказана.

Разсмотримъ признакъ сходимости интеграла, когда подынтегральная функція $f(x)$ обращается въ безконечность въ точкѣ c

ОПРЕДѢЛЕНІЕ. ЕСЛИ $f(x)$ ОБРАЩАЕТСЯ ВЪ ТОЧКѢ c ВЪ БЕЗКОНЕЧНОСТЬ ТАКЪ, ЧТО ВЫРАЖЕНІЕ

$$(x-c)^m f(x)$$

ИМѢЕТЪ КОНЕЧНЫЙ, НЕРАВНЫЙ НУЛЮ, ПРЕДѢЛЪ, ТО ГОВОРЯТЪ, ЧТО ФУНКЦІЯ $f(x)$ ИМѢЕТЪ ВЪ ТОЧКѢ c ПОРЯДОКЪ БЕЗКОНЕЧНОСТИ, РАВНЫЙ m

Такъ какъ

$$\int_{c+\varepsilon}^{a}\frac{dx}{(x-c)^m}=\frac{1}{(1-m)(a-c)^m}-\frac{1}{(1-m)\varepsilon^m}$$

$$\int_{c+\varepsilon}^{a}\frac{dx}{x-c}=\lg|a-c|-\lg|\varepsilon|$$

то заключаемъ, что интегралъ

$$\int^{c}\frac{dx}{(x-c)^m} \qquad (1)$$

существуетъ въ области точки c, если $m<1$ если же $m\geqq 1$, то интеграла не существуетъ.

Теперь имѣемъ теорему.

ЕСЛИ $f(x)$ ОБРАЩАЕТСЯ ВЪ ТОЧКѢ c ВЪ БЕЗКОНЕЧНОСТЬ, ТО ИНТЕГРАЛЪ

$$\int^{c}f(x)dx \qquad (2)$$

существуетъ, если порядокъ безконечности функціи въ точкѣ c меньше единицы; если же онъ больше или равенъ единицѣ, то интеграла не существуетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$\int^c f(x)dx = \int^c (x-c)^m f(x)\,\frac{dx}{(x-c)^m}$$

то, согласно леммѣ, интегралы (1) и (2) существуютъ или не существуютъ одновременно.

Замѣчаніе. Эта и предыдущая теорема имѣютъ мѣсто только подъ условіемъ, что подинтегральная функція сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ въ области критической точки, потому что только подъ этимъ условіемъ была доказана лемма. Это ограниченіе во многихъ, особенно старыхъ, курсахъ упускается изъ виду.

ГЛАВА XVI. НѢКОТОРЫЯ ПРИЛОЖЕНІЯ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ

Здѣсь мы разсмотримъ приложеніе опредѣленныхъ интеграловъ къ изслѣдованію нѣкоторыхъ вопросовъ.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМЪ ЗНАЧЕНІИ ИНТЕГРАЛА.

Если функція $\psi(x)$ сохраняетъ свой знакъ въ интервалѣ (a, b), гдѣ a и b могутъ быть какъ конечными, такъ и безконечными числами, и если $\varphi(x)$ непрерывная функція на всемъ интервалѣ (a, b) *), то

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)dx \qquad (1)$$

гдѣ ξ промежуточное между a и b.

Замѣтимъ, что $\psi(x)$ можетъ быть прерывной функціей, такъ что интегралы теоремы могутъ быть обобщенными.

Пусть m и M наименьшее и наибольшее значеніе функціи $\varphi(x)$. Предполагая, что $a<b$, и что $\psi(x)$ положительна, имѣемъ

$$m\,\psi(x) < \varphi(x)\psi(x) < M\,\psi(x) \qquad (2)$$

а потому

$$m\int_a^b \psi(x)dx < \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx < M\int_a^b \psi(x)dx \qquad (3)$$

Слѣдовательно

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = q\int_a^b \psi(x)dx$$

гдѣ q промежуточное между m и M, а потому должно быть такое ξ, что $q=\varphi(\xi)$, и получаемъ (1).

*) *Поэтому, если, напримѣръ, $b=+\infty$, то $\varphi(+\infty)$ должно быть конечнымъ.*

Если $\varphi(x)$ отрицательна, то все доказательство остается въ силѣ, только неравенства (2) и (3) перемѣнятъ знакъ

Если же $a > b$, то перестановка предѣловъ докажетъ теорему.

СТРОКА ТЭЙЛОРА

Однимъ изъ весьма интересныхъ приложенiй теорiи опредѣленныхъ интеграловъ является приложенiе этой теорiи къ выводу строки Тэйлора.

Пусть $f(x)$ данная функцiя, непрерывная въ нѣкоторомъ интервалѣ (a, b). Мы будемъ предполагать, что также непрерывны и всѣ тѣ ея производныя, которыя будутъ встрѣчаться въ теченiе доказательства

Связь между опредѣленнымъ и неопредѣленнымъ интеграломъ даетъ намъ слѣдующее равенство:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \qquad (1)$$

И вотъ оказывается, что въ этомъ равенствѣ въ скрытомъ видѣ уже заключена вся строка Тэйлора.

Перепишемъ равенство (1) въ слѣдующей формѣ:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, d(x - b) \qquad (2)$$

и проинтегрируемъ правую часть по частямъ. Имѣемъ

$$\int_a^b f'(x)\, d(x - b) = \left[(x - b) f'(x)\right]_a^b - \int_a^b (x - b) f''(x)\, dx$$

а потому

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(a) + \int_a^b (b - x) f''(x)\, dx \qquad (3)$$

Интегралъ правой части переписываемъ въ такой формѣ:

$$\int_a^b (b - x) f''(x) dx = -\frac{1}{1 \cdot 2} \int_a^b f''(x)\, d(b - x)^2$$

и интегрируемъ его по частямъ. Получаемъ:

$$\int_a^b (b - x) f''(x) dx = -\frac{1}{1 \cdot 2}\left[(b - x)^2 f''(x)\right]_a^b + \frac{1}{1 \cdot 2}\int_a^b (b - x)^2 f'''(x)\, dx$$

благодаря чему равенство (3) преобразуется въ равенство

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(a) + \frac{(b - a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{1}{1 \cdot 2}\int_a^b (b - x)^2 f'''(x)\, dx \qquad (4)$$

Снова интегрируемъ по частямъ интегралъ правой части. Замѣчая,

что

$$\frac{1}{1\cdot 2}\int_a^b (b-x)^2 f'''(x)\,dx = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\int_a^b f'''(x)\,d(b-x)^3 =$$
$$= -\frac{1}{3!}\Big[(b-x)^3 f'''(x)\Big]_a^b + \frac{1}{3!}\int_a^b (b-x)^3 f^{IV}(x)\,dx,$$

мы получаемъ

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\int_a^b (b-x)^3 f^{IV}(x)\,dx$$

и интегралъ правой части мы снова можемъ проинтегрировать по частямъ.

Ясно, что каждое интегрированіе по частямъ прибавляетъ новый членъ въ правой части, и не трудно подмѣтить общій законъ образованія этихъ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, какое бы ни было k мы имѣемъ:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)}\int_a^b (b-x)^{k-1} f^{(k)}(x)\,dx = -\frac{1}{k}\int_a^b f^{(k)}(x)\,d(b-x)^k$$

и интегрированіе по частямъ намъ даетъ равенство

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)}\int_a^b (b-x)^{k-1} f^{(k)}(x)\,dx = \frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\int_a^b (b-x)^k f^{(k+1)}(x)\,dx$$

Полагая же здѣсь k послѣдовательно равнымъ 1, 2, 3, ..., $n-1$ – мы находимъ слѣдующую таблицу равенствъ.

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx$$
$$\int_a^b f'(x)\,dx = \frac{(b-a)f'(a)}{1} + \frac{1}{1}\int_a^b (b-x) f''(x)\,dx$$
$$\frac{1}{1}\int_a^b (b-x) f''(x)\,dx = \frac{(b-a)^2 f''(a)}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2}\int_a^b (b-x)^2 f'''(x)\,dx$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}\int_a^b (b-x)^2 f'''(x)\,dx = \frac{(b-a)^3 f'''(a)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\int_a^b (b-x)^3 f^{IV}(x)\,dx$$
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\int_a^b (b-x)^3 f^{IV}(x)\,dx = \frac{(b-a)^4 f^{IV}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\int_a^b (b-x)^4 f^{V}(x)\,dx$$

. . . .

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-2)}\int_a^b (b-x)^{n-2} f^{(n-1)}(x)\,dx = \frac{(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx$$

Складывая всѣ эти равенства, получаемъ

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}f^{(n-1)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx \qquad (5)$$

Но это и есть не что иное, какъ строка Тэилора.

Представимъ ее въ болѣе привычной формѣ. Для этого мы сначала въ интегралѣ правой части замѣнимъ символъ x , какъ символъ перемѣнной интеграціи, символомъ u , а затѣмъ величины a и b замѣнимъ черезъ x и $x+h$. Получимъ

$$f(x+h) = f(x) + \frac{hf'(x)}{1} + \frac{h^2f''(x)}{2!} + \frac{h^3f'''(x)}{3!} + \qquad + \frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + R_n \qquad (6)$$

гдѣ

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^{x+h}(x+h-u)^{n-1} f^{(n)}(u)\,du \qquad (7)$$

Въ результатѣ мы имѣемъ строку Тэилора, остатокъ которой дается въ формѣ опредѣленнаго интеграла.

Этотъ интегралъ не трудно представить въ болѣе простомъ видѣ. Прежде всего сама собою напрашивается подстановка

$$u = x + z$$

Очевидно, когда u измѣняется отъ x до $x+h$, то z измѣняется отъ нуля до h , а потому

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-z)^{n-1} f^{(n)}(x+z)\,dz \qquad (8)$$

Теперь предѣлы интеграла уже не зависятъ отъ x. Не трудно сдѣлать такъ, чтобы эти предѣлы не зависѣли также и отъ h . Для этого положимъ

$$z = ht$$

Когда z измѣняется отъ нуля до h то t измѣняется отъ нуля до единицы, а потому

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(x+ht)\,dt \qquad (9)$$

и въ правой части мы имѣемъ интегралъ уже съ постоянными предѣлами.

Въ результатѣ мы получаемъ теорему

ЕСЛИ ДАННАЯ ФУНКЦІЯ $f(x)$ ВМѢСТѢ СЪ ПРОИЗВОДНЫМИ ДО n-ГО ПОРЯДКА ВКЛЮЧИТЕЛЬНО НЕПРЕРЫВНА ВЪ РАЗСМАТРИВАЕМОМЪ ИНТЕРВАЛѢ, ТО ВСЕГДА

$$f(x+h) = f(x) + \frac{hf'(x)}{1} + \frac{h^2f''(x)}{2!} + \qquad + \frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + R_n$$

гдѣ

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(x+ht)\,dt \qquad (10)$$

Такои выводъ строки Тэйлора, уже замѣчательный самъ по себѣ, пріобрѣтаетъ особое значеніе благодаря тому, что мы получили новую форму для остатка Эта форма, какъ оказывается, иногда очень удобна при теоретическихъ изслѣдованіяхъ. Преимущество ея передъ формами, данными Коши и Лагранжемъ, заключается въ томъ, что въ нее не входитъ неизвѣстной величины θ. Но изъ нея не трудно получить обычныя формы Пусть p произвольно взятое положительное число Мы имѣемъ

$$\mathfrak{R}_n = \frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-p} f^{(n)}(x+ht)\,(1-t)^p\,dt$$

и такъ какъ множитель $(1-t)^p$ постоянно положителенъ, пока t мѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до 1, то по обобщенной теоремѣ о среднемъ значеніи интеграла

$$\mathfrak{R}_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(x+h\theta)}{(n-1)!}\int_0 (1-t)^p\,dt$$

гдѣ $0<\theta<1$ Вычисляя же интегралъ правой части, находимъ

$$\mathfrak{R}_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(x+\theta h)}{p.1.2.3.\ \ldots\ .(n-1)}$$

т.е. мы получили остатокъ въ формѣ Шломильха.

ФОРМУЛА ВАЛЛИСА.

Вычислимъ слѣдующіи интегралъ

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

величину котораго мы обозначимъ символомъ u_n, причемъ индексъ у этого символа долженъ показывать, въ какой степени въ подинтегральномъ выраженіи берется функція $\sin x$. Показатель n считаемъ цѣлымъ положительнымъ числомъ

Имѣемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,d\cos x$$

и интегрируя по частямъ, послѣдовательно находимъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\Big[\sin^{n-1} x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx =$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx$$

Слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

Въ правой части снова появился искомый интегралъ. Перенося его въ лѣвую часть, находимъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx$$

или, пользуясь сокращеннымъ обозначеніемъ

$$u_n = \frac{n-1}{n}u_{n-2} \qquad (1)$$

Полученная формула приводитъ искомый интегралъ къ интегралу того же типа, но съ показателемъ, уменьшеннымъ на двѣ единицы. Примѣняя же эту формулу нѣсколько разъ и понижая каждый разъ показателя на двѣ единицы, мы придемъ наконецъ къ одному изъ слѣдующихъ интеграловъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \text{или} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1$$

смотря потому, равенъ ли n четному числу или нечетному. Вычислимъ u_n.

если n четное $n = 2m$, то

$$u_{2m} = \frac{2m-1}{2m}u_{2m-2}$$
$$u_{2m-2} = \frac{2m-3}{2m-2}u_{2m-4}$$
$$u_{2m-4} = \frac{2m-5}{2m-4}u_{2m-6}$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_4 = \frac{3}{4}u_2$$
$$u_2 = \frac{1}{2}u_0$$
$$u_0 = \frac{\pi}{2}$$

если n нечетное $n = 2m-1$, то

$$u_{2m-1} = \frac{2m-2}{2m-1}u_{2m-3}$$
$$u_{2m-3} = \frac{2m-4}{2m-3}u_{2m-5}$$
$$u_{2m-5} = \frac{2m-6}{2m-5}u_{2m-7}$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_5 = \frac{4}{5}u_3$$
$$u_3 = \frac{2}{3}u_1$$
$$u_1 = 1$$

Перемножая между собой равенства каждой системы, мы послѣ очевидныхъ сокращеній, получаемъ:

$$u_{2m} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2m-5)(2m-3)(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots(2m-4)(2m-2)2m} \qquad (2)$$

$$u_{2m-1} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots(2m-6)(2m-4)(2m-2)}{3\cdot5\cdot7\cdot9\ldots(2m-5)(2m-3)(2m-1)} \qquad (3)$$

Весьма красивыя выраженія. Въ числителяхъ и знаменателяхъ стоятъ произведенія послѣдовательныхъ или только четныхъ чиселъ или только нечетныхъ. Кромѣ того заслуживаетъ вниманія слѣдующее обстоятельство: въ правой части равенства (3) мы имѣемъ раціональное число, въ правой же части равенства (2) присутству-

етъ несоизмѣримое число π. Слѣдовательно ВЕЛИЧИНА ИНТЕГРАЛА

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

РАВНА РАЦІОНАЛЬНОМУ ЧИСЛУ ВЪ СЛУЧАѢ n НЕЧЕТНАГО, И ОНА РАВНА НЕСОИЗМЕРИМОМУ ЧИСЛУ ВЪ СЛУЧАѢ n ЧЕТНАГО.

Отсюда слѣдуетъ, что чтобы знать величину интеграла u_n при n четномъ, необходимо предварительно знать значеніе π

Весьма теперь любопытно то обстоятельство, что какъ оказывается, равенствами (2) и (3) можно воспользоваться для вычисленія π

Если x измѣняется только въ границахъ отъ нуля до $\frac{\pi}{2}$ то $\sin$ положителенъ и меньше единицы. Поэтому,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x\,dx$$

или при нашихъ сокращенныхъ обозначеніяхъ

$$u_{2m+1} < u_{2m} < u_{2m-1} \qquad (4)$$

Замѣнимъ въ этихъ неравенствахъ интегралы ихъ значеніями изъ равенствъ (2) и (3), которыя намъ даютъ значенія для u_{2m} и u_{2m-1}. Чтобы получить значеніе для u_{2m+1}, для этого очевидно, достаточно въ равенствѣ (2) замѣнить m черезъ $m+1$. Дѣлая все это, получаемъ неравенства

$$\frac{2.4.6\ldots(2m-4)(2m-2)\,2m}{3.5.7\ldots(2m-3)(2m-1)(2m+1)} < \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2m-3)(2m-1)}{2.4.6\ldots(2m-2).2m} < \frac{2.4.6\ldots(2m-4)(2m-2)}{3.5.7\ldots(2m-3)(2m-1)}$$

Раздѣляя же эти неравенства на лѣвую часть имѣемъ

$$1 < \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.3.5.5.7\ldots(2m-3)(2m-3)(2m-1)(2m-1)(2m+1)}{2.2.4.4.6.6\ldots(2m-4)(2m-2)(2m-2)\,2m.2m} < 1 + \frac{1}{2m}$$

откуда ясно что можно написать слѣдующее равенство

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m-1)(2m+1)}{2.2.4.4.6\ldots(2m-2).2m.2m} = 1 + \frac{\theta_m}{2m} \qquad (5)$$

гдѣ θ_m — неизвѣстная положительная величина, меньшая единицы. Значеніе ея очевидно зависитъ отъ того, каково m, которое можетъ быть какимъ угодно цѣлымъ числомъ.

Изъ (5) мы получаемъ замѣчательную формулу

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots(2m-2)(2m-2)\,2m.2m}{1.3.3.5.5.7\ldots(2m-3)(2m-1)(2m-1)(2m+1)}\left(1 + \frac{\theta_m}{2m}\right) \qquad (6)$$

Эта формула даетъ возможность вычислить π. Въ самомъ дѣлѣ, принявъ, что

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6\ldots(2m-2).2m.2m}{1.3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m-1).2m}$$

мы сдѣлаемъ ошибку которая меньше $\frac{1}{2m}$ того значенія, которое

получится для $\frac{\pi}{2}$ *).

Раздѣлимъ равенство (6) на послѣдній множитель правой части и затѣмъ перепишемъ его въ такой формѣ:

$$\frac{\pi}{2(1+\frac{\theta_m}{2m})} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}$$

Это равенство справедливо при всякомъ m. Если же мы будемъ увеличивать m, то будетъ увеличиваться число множителей въ правой части.

Вообразимъ, что m возрастаетъ до безконечности. Тогда въ предѣлѣ правая часть обратится въ произведеніе безконечнаго числа множителей и мы получаемъ слѣдующее чрезвычайно красивое равенство $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$

Это равенство называется формулой Валлиса. Она даетъ выраженіе для π черезъ безконечное произведеніе.

ИНТЕГРАЛЪ $\frac{1}{n-1}\int_a^x (x-z)^{n} f(z)\,dz$

Если мы отъ непрерывной функціи $f(x)$ возьмемъ интегралъ отъ a до x, гдѣ a нѣкоторая постоянная величина, то получимъ функцію

$$\psi(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

и эта функція, какъ извѣстно, есть не что иное, какъ та изъ первообразныхъ для данной функціи $f(x)$, которая обращается въ нуль при $x=a$: $\psi'(x) = f(x)$ $\psi(a) = 0$

Но получивъ функцію $\psi(x)$, мы можемъ ее въ свою очередь проинтегрировать въ предѣлахъ отъ a до x. Получимъ функцію, которая обозначится такъ

$$\int_a^x \left\{\int_a^x f(x)\,dx\right\} dx$$

Отъ этой функціи мы можемъ снова взять интегралъ въ предѣлахъ отъ a до x. Получимъ

$$\int_a^x \left\{\int_a^x \left(\int_a^x f(x)\,dx\right) dx\right\} dx$$

которую въ свою очередь можемъ проинтегрировать между тѣми же предѣлами отъ a до x, и т.д.

Вообще, если мы данную функцію $f(x)$ последовательно

*) *Чтобы ясно это видѣть, достаточно переписать равенство (6) въ такой формѣ* $\frac{\pi}{2} = p_m(1+\frac{\theta_m}{2m}) = p_m + p_m\frac{\theta_m}{2m}$. *Такъ какъ* $\theta_n < 1$, *то, принимая, что* $\frac{\pi}{2} = p_m$, *мы дѣлаемъ ошибку, которая меньше чѣмъ* $\frac{p_m}{2m}$

проинтегрируемъ n разъ, каждый разъ въ предѣлахъ отъ a до x, то мы получимъ функцію

$$u=\int_a^x\Big(\int_a^x\Big(\int_a^x \qquad \Big(\int_a^x f(x)\,dx\Big)dx \qquad \Big)dx\Big)dx\Big)dx$$

которую принято короче обозначать такъ

$$u=\int_a^x\int_a^x\int_a^x \qquad \int_a^x\int_a^x f(x)\,(dx)^n$$

или еще короче такъ

$$u=\int_a^x f(x)\,(dx)^n$$

При этомъ очевидно, что при каждомъ новомъ интегрированіи мы будемъ получать функцію, производная которой равна той функціи отъ которой берется послѣдній интегралъ Поэтому ясно что

$$\frac{du}{dx}=\int_a^x f(x\,(dx)^{n}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\int_a^x f(x)\,(d\,x)^{n\ 2}$$

$$\dots$$

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}=\int_a^x f(x)\,dx$$

$$\frac{d^nu}{dx^n}=f(x)$$

и что сама функція u и всѣ ея производныя до (n 1) порядка равны нулю при $x=a$

Вообще говоря въ большинствѣ случаевъ бываетъ затруднительно произвести даже одно интегрированіе, тѣмъ болѣе нѣсколько послѣдовательныхъ интегрированій. Поэтому заслуживаетъ особаго вниманія тотъ замѣчательный фактъ, что оказывается что n-кратное интегрированіе всегда можетъ быть замѣнено однимъ интегрированіемъ. Въ самомъ дѣлѣ примѣняя теорему объ интегрированіи по частямъ мы имѣемъ:

$$\int_a^x\Big(\int_a^x f(x)\,dx\Big)dx=\Big[x\int_a^x f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=x}-\int_a^x x f(x)\,dx$$

Первый членъ въ правой части при нижней подстановкѣ обращается въ нуль, а потому:

$$\int_a^x\Big(\int_a^x f(x)\,dx\Big)dx \quad x\int_a^x f(x)\,dx-\int_a^x x f(x)\,dx$$

Замѣнимъ теперь въ правой части символъ x, какъ символъ перемѣнной интеграціи новымъ символомъ z Мы получаемъ:

$$\int_a^x\int_a^x f(x)(dx)^2 - x\int_a^x f(z)\,dz \quad \int_a^x z f(z)\,dz$$

Теперь мы можемъ въ гервомъ интегралѣ правои части подвести x, какъ постоянный множитель, подъ символъ интеграла. Получимъ

$$\int_a^x\int_a^x f(x)(dx)^2 \quad \int_a^c (x \quad z) f(z)\,dz \qquad (1)$$

и мы видимъ что результатъ двукратнаго интегрированія выражается черезъ одинъ опредѣленнми интегралъ, причемъ функція $f(x)$ можетъ бытъ какою угодно непрерывнои функціей.

Замѣнимъ въ равенствѣ (1) функцію $f(x)$ функціей

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

Тогда получимъ

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)(dx)^3 \quad \int_a^x (x \quad z)\left(\int_a^z f(z)\,dz\right)dz -$$

$$\frac{1}{2}\int_a^x \left(\int_a^z f(z)\,dz\right) d(x \quad z)^2$$

и, интегрируя правую часть по частямъ, имѣемъ

$$\int_a^x f(x)(dx)^3 = \frac{1}{2}\left[\left(\int_a^z f(z)\,dz\right)(x \quad z)^2\right]_{z \quad a}^{z=x} + \frac{1}{2}\int_a^x (x \quad z)^2 f(z)\,dz$$

Первый членъ въ правои части обращается въ нуль и при верхнеи и при нижней подстановкѣ, а потому

$$\int_a^x f(x)(dx)^3 = \frac{1}{2}\int_a^x (x \quad z)^2 f(z)\,dz \qquad (2)$$

Замѣняя же здѣсь снова $f(x)$ черезъ функцію

$$\int_a^x f(x)\,dx,$$

получимъ

$$\int_a^x f(x)(dx)^4 = \frac{1}{2}\int_a^x (x \quad z)^2\left(\int_a^z f(z)\,dz\right)dz =$$

$$= -\frac{1}{3!}\int_a^x \left(\int_a^z f(z)\,dz\right) d(x-z)^3$$

что послѣ интегрированія по частямъ даетъ

$$\int_a^x f(x)(dx)^4 \quad \frac{1}{3!}\int_a^x (x \quad z)^3 f(z)\,dz \qquad (3)$$

Равенства (1), (2) и (3) естественно наводятъ на мысль, что всегда

$$\int_a^x f(x)(dx)^n - \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x \quad z)^n \; f(z)\,dz \qquad (4)$$

Чтобы доказать справедливость этого равенства при всякомъ n намъ остается только доказать, что если оно справедливо при какомъ-нибудь n, то оно справедливо и при слѣдующемъ за n числомъ. Для этого перепишемъ (4) въ такой формѣ

$$\int_a^x f(x)(dx)^n \quad \frac{1}{n}\int_a^x f(z)\,d(x\ \ z)^n$$

и замѣняя $f(x)$ черезъ

$$\int_a^x f(x\ \ dx$$

интегрируемъ правую часть по частямъ. Получаемъ:

$$\int_a^x f(x)(dx)^{n+1} \quad \frac{1}{n}\int_a^x\left(\int_a^z f(z)\,dz\right)d(x\ \ z)^n =$$

$$\frac{1}{n'}\left[(x\ \ z)^n\int_a^z f(z)\,dz\right]_z^x{}_a + \frac{1}{n'}\int_a^x (x\ \ z)\ f(\ )\,dz$$

т. е.

$$\int_a^x f(x)(dx)^{n+} \ . \frac{1}{n'}\int_a^x (x\ \ \ )^n f(z)\,dz$$

но это равенство есть ни что иное, какъ равенство (4) въ которомъ n замѣнено $n+1$. Слѣдовательно, равенство (4) справедливо при всякомъ n и мы получаемъ теорему:

ПОСЛѢДОВАТЕЛЬНОЕ n - КРАТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНІ ДАННОЙ ФУНКЦІИ ОТЪ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ НИЖНЯГО ПРЕДѢЛА МОЖЕТЪ БЫТЬ ЗАМѢНЕНО ОДНИМЪ ИНТЕГРИРОВАНІЕМЪ ПО ФОРМУЛѢ:

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x \qquad \int_a^x f(x)(dx)^n = \frac{1}{(n\ \ 1)}\int_a^x (x\ \ z)^n\ f(z)\,dz$$

Продифференцируемъ это равенство n разъ. Каждое дифференцированіе уничтожаетъ въ лѣвой части одинъ символъ интегрированія, а потому въ результатѣ мы получимъ равенство:

$$\frac{1}{(n-1)!}\ \frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x\ \ z)^n\ f(z)\,dz = f(x$$

но это равенство не трудно также вывести непосредственно пользуясь теоремой о дифференцированіи опредѣленнаго интеграла по параметру, согласно которой, если a и b функціи x гдѣ x играетъ роль параметра

$$\frac{d}{dx}\int_a^b \psi(x\ \ z)\,dz \quad \psi(x\ \ b)\frac{db}{dx} \quad \psi\ a\ x)\frac{da}{dx} + \int_a^b \frac{d\psi(x,z)}{dx}\,dz$$

Въ нашемъ случаѣ a постоянная величина и $b=x$, а потому

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz = \frac{1}{(n-1)}\int_a^x \frac{d(x-z)^n}{dx} f(z)\,dz$$

т. е.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(n-1)}\int_a^x (x-z)^n f(z)\,dz = \frac{1}{(n-2)}\int_a^x (x-z)^{n-2} f(z)\,dz \qquad (5)$$

мы видимъ, что, чтобы найти производную по x отъ выраженія

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-z)^n f(z)\,dz$$

достаточно въ немъ замѣнить n черезъ $n-1$, причемъ получится выраженіе того же типа, такъ что при вычисленіи отъ него производной можно повторить тотъ же пріемъ. Поэтому, дифференцируя равенство (5) получаемъ:

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{(n-1)}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz = \frac{1}{(n-3)}\int_a^x (x-z)^{n-3} f(z)\,dz$$

Снова дифференцируя и продолжая поступать такимъ же образомъ последовательно находимъ:

$$\frac{d^3}{dx^3}\frac{1}{(n-1)}\int_a^x (x-z)^n f(z)\,dz = \frac{1}{(n-4)!}\int_a^x (x-z)^{n-4} f(z)\,dz$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\frac{1}{(n-1)}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz = \frac{1}{(n-5)}\int_a^x (x-z)^{n-5} f(z)\,dz$$

$$\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\frac{1}{(n-1)}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz = \frac{1}{1}\int_a^x (x-z) f(z)\,dz$$

$$\frac{d^n}{dx^{n-1}}\frac{1}{(n-1)}\int_a^x (x-z)^n f(z)\,dz = \frac{1}{0}\int_a^x f(z)\,dz$$

и новое дифференцированіе намъ даетъ слѣдующій окончательный результатъ: ЕСЛИ

$$u = \frac{1}{(n-1)}\int_a^x (x-z)^n f(z)\,dz$$

ТО

$$\frac{d^n u}{dx^n} = f(x)$$

— ———

ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

Эйлеровымъ интеграломъ перваго рода называется интегралъ

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

Если $p<1$, то подынтегральная функція безконечна при $x=0$, она безконечна при $x=1$ если $q<1$. Поэтому возникаетъ вопросъ о существованіи интеграла. Полагая

$$f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

имѣемъ

$$\lim_{x=0} x^{1-p}f(x)=1 \qquad \lim_{x=1}(1-x)^{1-q}f(x)=1$$

Слѣдовательно, порядокъ безконечности функціи $f(x)$ равенъ p въ точкѣ $x=0$, и q въ точкѣ $x=1$. Поэтому интегралъ существуетъ тогда, и только тогда, когда p и q положительны. Этотъ интегралъ обозначается такъ $B(p,q)$, что читается такъ: бэта отъ p и q.

Эйлеровъ интегралъ второго вида называется интегралъ

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

Обозначается онъ такъ $\Gamma(p)$ что читается такъ: гамма отъ p. Если $p<1$, то порядокъ безконечности подынтегральной функціи въ точкѣ $x=0$ равенъ p, а потому въ области этой точки интегралъ существуетъ тогда, и только тогда, когда p положительно. Въ области $+\infty$ интегралъ всегда существуетъ, потому что при всякомъ m

$$\lim_{x=\infty} x^m e^{-x}=0$$

и, слѣдовательно, порядокъ малости подынтегральной функціи больше единицы.

Итакъ, при положительныхъ показателяхъ и только при положительныхъ, Эйлеровы интегралы существуютъ. Возьмемъ первый изъ нихъ:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (1)$$

Полагая $x=1-y$, получаемъ

$$B(p,q)=-\int_1^0(1-y)^{p-1}y^{q-1}\,dy$$

Переставляемъ въ правой части предѣлы интеграла и замѣчимъ символъ перемѣнной интеграціи y символомъ x. Получимъ

$$B(p\,q) = \int_0 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx$$

Слѣдовательно

$$B(p,q) = B(q\,,p) \qquad (2)$$

Такимъ образомъ оказывается, что функція B симметрична относительно своихъ аргументовъ

Сдѣлаемъ теперь такую подстановку

$$x = \frac{z}{1+z} \qquad z = \frac{x}{1-x}$$

Когда x мѣняется отъ нуля до единицы, то z мѣняется отъ нуля до $+\infty$ а потому, сдѣлавъ подстановку найдемъ, что

$$B(p\,q) = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz \qquad 3)$$

Мы скоро воспользуемся этой формулой Теперь же разсмотримъ Эйлеровъ интегралъ второго рода.

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p} e^{-x}\,dx \qquad (4)$$

Прежде всего имѣемъ

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = \Big|_{x=\infty}^{x=0} e^{-x} \qquad (5)$$

а потому

$$\Gamma(1) = 1$$

Это можно считать первымъ свойствомъ функціи $\Gamma(p)$ Далѣе, интегрируя по частямъ, мы послѣдовательно имѣемъ:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}dx = -\int_0^\infty x^p d e^{-x} =$$

$$-\left[x^p e^{-x}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-x} x^{p}\,dx$$

Легко убѣдиться, что

$$\lim\left[x^p e^{-x}\right]_{x=\infty} = 0$$

а потому

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) \qquad (6)$$

Это второе свойство функціи Гаммы.

Пусть теперь m цѣлое положительное число Примѣняя равенство (6) нѣсколько разъ, мы имѣемъ:

$$\Gamma(m+1) = m\,\Gamma(m)$$

$$\Gamma(m) = (m-1)\Gamma(m-1)$$

$$\Gamma(m) \quad (m-2)\Gamma \quad m \quad 2)$$

$$\dots\dots$$

$$\Gamma(3) \quad 2\Gamma(2)$$

$$\Gamma(2) - 1\Gamma($$

$$\Gamma() \quad 1$$

Перемноживъ всѣ эти равенства, заключаемъ, что

$$\Gamma(m+1) \quad 1.2.3.4. \quad . \quad (m-1)m - m! \qquad 7$$

Это третье свойство Гамма. Замѣчательно, что въ первой част стоитъ выраженіе, которое имѣетъ смыслъ только при цѣломъ

Возвратимся къ основному равенству. Полагая $x = ay$, гдѣ постоянная положительная величина. Получимъ

$$\Gamma(p) \quad a^p\int_0^{\infty} e^{-ay} y^{p-1} dy. \qquad (8$$

откуда

$$\frac{1}{a^p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int e^{-ay} y^{p-1} dy \qquad (9$$

Замѣнимъ здѣсь a черезъ $1+x$, а p черезъ $p+q$ получимъ:

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\infty} e^{-(1+x)y} y^{p+q} \quad dy \qquad (1$$

Возьмемъ теперь равенство (8). Благодаря (10) это равенство можно переписать въ такой формѣ:

$$B(p\,q) = \int_0^{\infty}\left\{\frac{x^{p-1}}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\infty} e^{-(1+x)y} y^{p+q-1} dy\right\} dx$$

или такъ выносъ и подводя послѣдніе множители подъ знакъ теграла

$$B(p\,q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty} e^{-(1+x)y} y^{p+q-1} x^{p-1} dy\right\} dx$$

Измѣнимъ порядокъ интеграціи. Имѣемъ

$$B(p\,q) \quad \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty} e^{-(1+x)y} y^{p+q} x^{p-1} dx\right\} dy$$

или выносъ послѣдній множитель,

$$B(p\,q) \quad \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\infty}\left\{e^{-y} y^{p+q-1}\int_0^{\infty} e^{-yx} x^{p-1} dx\right\} dy \qquad (1$$

Въ равенствѣ (8, вмѣсто a напишемъ y а y замѣнимъ буквой x. Получимъ:

$$\Gamma(p) \quad y^p\int e^{-yx} x^{p-1} dx$$

Теперь (11) обращается въ

$$B(p\,q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty \{e^{-y} y^{q-1} \Gamma(p)\} dy$$

т.е. послѣ выноса постояннаго множителя $\Gamma(p)$, въ

$$B(p\,q) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty e^{-y} y^{q-1}\, dy$$

и окончательно имѣемъ:

$$B(p\,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{12}$$

Слѣдовательно функція B выражается черезъ функцію Γ

ЗАДАЧИ

ВЫЧИСЛЕНІЕ ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА

1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)} = 1 - lg 2$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx = \pi - 2$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\alpha \cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{12}$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{2+\cos\alpha} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

3) $\int_0^1 x^2 lg x\, dx = -\frac{1}{9}$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = \frac{\pi}{4}$

7) $\int_0^{lg 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx = 4 - \pi$ подстановка $e^x - 1 = z$

8) $\int_0^a \frac{x^3\, dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{2}-4}{2}\, a$ полагая $x = a\, tg\, t$

9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{3+2\sin 2x}\, dx = \frac{lg 3}{4}$ полагая $\sin x - \cos x = t$

10) $\int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{(x^2+1)\, dx}{x\sqrt{x^4+7x^2+1}} = lg 3$ полагая $x - \frac{1}{x} = z$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЕ И ИНТЕГРИРОВАНІЕ ПО ПАРАМЕТРУ.

1) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\lg(1+\sqrt{2})$

Примѣчаніе. Полагая $u = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x\sqrt{1-x^2}}$, вычисляемъ $\frac{du}{da}$ съ помощью подстановки $x=\sin\varphi$ и затѣмъ подстановки $\operatorname{tg}\varphi = z$.

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg\left(\frac{a+\sin x}{a-\sin x}\right)\frac{dx}{\sin x} = \pi\arcsin\frac{1}{a}$ $\quad a>1$

Прим. $\lg\left(\frac{a+\sin x}{a-\sin x}\right) = \Big|_{z=-1}^{z=+1}\lg(a+z\sin x) = \int_{-1}^{+1}\frac{d}{dz}\lg(a+z\sin x)\,dz =$

$$= \int_{-1}^{0}\frac{\sin x\,dz}{a+z\sin x} + \int_0^1$$

въ первомъ интегралѣ мѣняемъ z на $-z$. Данный интегралъ приводится къ двукратному. Мѣняемъ порядокъ интегрированія.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lg(1+\cos x)\,dx}{\cos x} = \frac{\pi^2}{8}$

Прим. Полагая $u = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lg(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx$, вычисляемъ $\frac{du}{da}$ и затѣмъ u подстановкой $a=\cos\beta$. Тогда $du = \beta\,d\beta$.

4) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin^2 x}{x^2}\,dx = \operatorname{arctg}2 - \lg\sqrt[4]{5}$

Полагая $v = \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2}\,dx$, вычисляемъ $\frac{dv}{d\alpha}$, потомъ $\frac{d^2v}{d\alpha^2}$.

Найдемъ, что $\frac{d^2v}{d\alpha^2} = 2\int_0^\infty e^{-x}\cos(2\alpha x)\,dx = \frac{2}{1+4\alpha^2}$ Отсюда $\frac{dv}{d\alpha} = \operatorname{arctg}2\alpha$

5) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \lg\frac{b}{a}$, $\quad a,\ b>0$

Интегрируемъ по z отъ a до b равенство

$$\int_0^\infty e^{-zx}\,dx = \frac{1}{z}$$

ПЛОЩАДИ.

Вычислить площадь криволинейной трапеции $aABb$, если

1) $a = 3$ $\quad b = 8$ $\quad y^2(1+x) = 36$ $\quad$ Отв 12

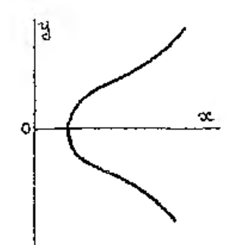
2) $a = 2\sqrt{2}$ $\quad b = 2$, $\quad x^2 - 4y^2 = 4$ $\quad$ Отв. $\sqrt{2} + \lg \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

3) $a = 1$ $\quad b = 2$ $\quad x = \sqrt{y-1}$ $\quad$ Отв. 10/3

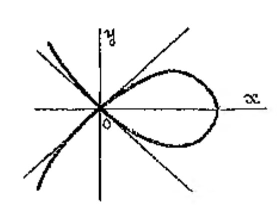
4) $a = \frac{\pi}{4}$ $\quad b = \frac{\pi}{6}$ $\quad x = \arcsin y$ $\quad$ Отв. $1/2(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

Вычислить площади, ограниченныя кривыми

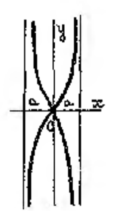
1) $y^2 = x^3 - x^2$ отъ $x = 1$ до $x = x$ (фиг 1). Отв. $2/15\,(x-1)^{3/2}\,(2+3x)$
2) $a\cdot(y^2 - x^2) + x^3 = 0$ (фиг.2) Отв. $4/15\,a^2$,
3) $y^2(a^2 - x^2) = a^2x^2$ (фиг.3) Отв. a^2
4) $y^2(a^2 - x^2) = a^4$ (фиг.4) Отв $\frac{\pi a^2}{2}$;
5) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (Астроида) Отв. $3/8\,\pi a^2$
6) Архимедовой спирали $r = a\omega$. Отв. $\frac{r^2\omega}{6}$
7) Логарифмической спирали $r = e^{m\varphi}$ Отв. $\frac{r^2-1}{4m}$



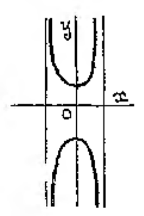
Фиг.1.



Фиг.2



Фиг 3



Фиг.4.

Вычислить площадь сектора, ограниченнаго радiусами векторами, наклоненными подъ углами α и β, если

1) $\alpha = 0$ $\quad \beta = \frac{\pi}{2}$ $\quad r = 2b\omega$ $\quad$ Отв $\frac{b^2\pi^2}{4}$

2) $\alpha = 0$ $\quad \beta = \frac{\pi}{2}$ $\quad r = b\,e^{m(\omega-\pi)}$ $\quad$ Отв $\frac{b^2}{2m}\left(\frac{e^{m\pi} - e^{2m\pi}}{2}\right)$

3) $\alpha = 0$ $\quad \beta = \frac{\pi}{4}$ $\quad r = \frac{c\cdot\sqrt{\sin\omega}}{\sqrt{1 + b\cos\omega}}$ $\quad$ Отв. $\frac{c^2}{2b}\lg\frac{4(1+b)}{b\pi + 4}$;

4) $\alpha = 0$ $\quad \beta = \frac{\pi}{4}$ $\quad r = \frac{b}{1+\omega}$ $\quad$ Отв. $\frac{\pi b^2}{2\pi + 4}$

ДЛИНА ДУГИ

Найти длину дуги между точками абсциссы которыхъ x_1 и x_2 если:

1) x 0 x $y = 4x^2$ Отв. $\frac{\sqrt{65}}{2} + \frac{1}{16}\lg(8+\sqrt{65})$

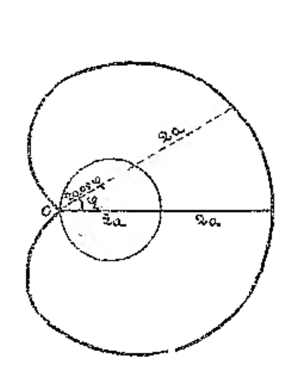
2) x 0 x_2 2 y^2 $2x^3$ Отв $\frac{4(10\sqrt{10}\ \ 1)}{27}$

3) x $\frac{\pi}{6}$ $x = \frac{\pi}{3}$ e^y $\cos x$ Отв. $\lg\frac{tg(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})}{tg(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12})} = \lg\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

4) x $\frac{\pi}{3}$ x_2 $\frac{2}{3}\pi$, y $\lg\sin x$ Отв $\lg\frac{tg\frac{\pi}{3}}{tg\frac{\pi}{6}} - \lg 3$

5) x 0 x_2 1 y^2 1 x^3 3x $x+1$) Отв. $\frac{2}{27}(11\sqrt{22}\ \ 13\sqrt{3})$

Вычислить дугу



1) Кардіоиды $r = 2a(1+\cos\varphi)$ (см. черт)

Отв. $s \int_0^{\varphi} d$ $8a\sin\frac{\varphi}{2}$

2) Астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Отв. полагая x $a\cos^3\varphi$ $y = a\sin^3\varphi$ имѣемъ

$s - {}^{3}/_{2}\, a\sin^2\varphi$ $\frac{3}{2a}y^{2/3}$

3) Кривой $r - 2a(\cos\varphi + \sin\varphi$ Отв. $2a\sqrt{2}\varphi$

4) Архимедовой Спирали r $a\omega$

Отв $a\left\{\frac{\omega}{2}\sqrt{1+\omega^2} + \frac{1}{2}\lg(\omega + \sqrt{1+\omega^2})\right.$

ПОВЕРХНОСТЬ ТѢЛА ВРАЩЕНІЯ

Дуга AB уравненіе которой $y = f(x)$ вращается около оси x. Абсциссы точекъ A B равны a и b Вычислить поверхность вращенія если

1) a b $+9$ y $\sqrt{3-x^2+2x}$ Отв 4π

2) a b 2 $y = \sqrt{2x}$ Отв $\frac{2\pi(5\sqrt{5}\ \ 1)}{3}$

3) a b 2 $y = 2\sqrt{3x+\ }$ Отв $\frac{16\pi}{9}(20\sqrt{5} - \ \sqrt{17})$

4) $a = 0$ $b = $ $y = $ Отв. $2\pi p l$.

ОБЪЕМЪ ТѢЛА ВРАЩЕНІЯ.

Вычислить объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ трапеціи $aABb$ если

1) $a=1$ $b=n$ $xy=m$ Отв $\frac{(n-1)m^2\pi}{n}$

2) a 2 b x^3y^2 Отв $\frac{\pi}{24}$

3) $a=1$ b 3 $xy=2$ Отв $\frac{94\pi}{9}$

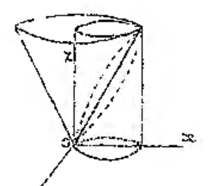
4) a 0, $b=1$ $lg\,y$ Отв $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$

5) a 0 $b=\frac{\pi}{9}$ $y=\sqrt{\sin x}$ Отв π

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

1 Вычислить поверхность шара $x^2+y^2+z^2$ a^2

2 Вычислить объемъ V тѣла, ограниченнаго плоскостью xy, цилиндрической поверхностью $y^2-ax+x^2=0$ и конусомъ $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ Вычислить поверхность S, вырѣзанную изъ конуса цилиндромъ



Отв V $\frac{4}{9}ca^2$ $S=\frac{\pi a\sqrt{c^2+b^2}}{4}$

3. Вычислить объемъ V и площадь S верхней поверхности тѣла, ограниченнаго плоскостью xy, цилиндрической поверхностью $r=b$ и параболоидомъ $az=x^2+y^2$ Отв. $V=\frac{\pi b^4}{2a}$. $S=\frac{\pi a}{2}\sqrt{a^2+4b^2}$

4. Вычислить объемъ тѣла, вырѣзаннаго изъ шара $x^2+y^2+z^2$ a цилиндромъ $x^2-ax+y^2=0$. Отв. $\frac{4}{3}a^3(\pi-\frac{4}{3})$.

Перемѣнный кругъ съ центромъ въ началѣ вращается около оси z, постоянно пересѣкая кругъ $x^2+y^2-2ax=0$, лежащій на плоскости xy. Вычислить объемъ V описываемаго имъ тѣла.

Отв. Уравненіе поверх. тѣла $z^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2-4a^2x^2=0$.

Въ полярныхъ координатахъ

$$\frac{V}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{r=2a\cos\varphi}\sqrt{4a^2\cos^2\varphi-r^2}\cdot r\,dr\right\}d\varphi=\frac{16}{9}a^3 \qquad V \quad \frac{64}{9}a^3$$

Вычислить объемъ тѣла, ограниченнаго цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=a^2$ плоскостью xy и плоскостью $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$

Отв $\pi\gamma a^2$.

Вычислить объемъ V и верхнюю поверхность S тѣла, ограниченнаго плоскостью xy цилиндрической поверхностью $x^2+y^2-a^2=0$ и конусомъ $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ Отв. $V=\frac{2\pi}{3}ca^2$ $S=\pi a\sqrt{a^2+c^2}$

ОГЛАВЛЕНІЕ.